

Q  
56  
S7

# *Annales de la* **SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE** *de Bruxelles*

*Association sans but lucratif*

TOME SOIXANTE-QUINZIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES  
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER ET DEUXIÈME FASCICULES

T.75.1-2.

15 juin 1961



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique  
et du Gouvernement*

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE  
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11  
LOUVAIN

1961

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 80 fr

## AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant une référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

## TABLE DES MATIÈRES

---

Manuscrits reçus le 31 janvier 1961.

### PREMIÈRE SECTION : SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

- Systèmes matériels de trois masses ponctuelles. Mouvement plan en coordonnées symétriques, par A. DEPRIT et A. DELIE..... 5

### DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.

- Sur les aberrations périaxiales de l'œil. II, par A. BIOT..... 45

Session du 20 avril 1961, à Bruxelles.

### PREMIÈRE SECTION : SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

- Gropoïdes en relation associative et semigroupes mutuellement associatifs, par A. SADE..... 52

- Un modèle mathématique de système à dissipation du type «structurel», par F. BUCKENS ..... 58

### DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.

- Sur les aberrations périaxiales de l'œil. III, par A. BIOT..... 79

- Sur les aberrations périaxiales de l'œil. IV, par A. BIOT..... 84

- Principe d'une méthode d'alignement, par A. BIOT..... 92

- Modèles statistiques dans l'étude de la réaction  $\text{Al}^{27} + d \rightarrow \text{Mg}^{25} + x$   
par G. DEMORTIER, J. C. JODOGNE et P. C. MACQ..... 94

- Diffusion élastique de neutrons de 14 Mev aux petits angles, par  
G. DECONNINCK, A. MARTEGANI, J. P. MEULDERS et J. STOQUART. 102
- 

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

<i>en Belgique et au Luxembourg</i>	100 F
<i>dans les autres pays</i>	150 F



MANUSCRITS REÇUS LE 31 JANVIER 1961

Première Section

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

## Systèmes matériels de trois masses ponctuelles

MOUVEMENT PLAN EN COORDONNÉES SYMÉTRIQUES

PAR

ANDRÉ DEPRIT et ANDRÉ DELIE

Faculté des Sciences  
Université de Louvain

Dans le cas particulier du problème plan des trois corps, F.D. Murnaghan a donné la fonction hamiltonienne et les équations canoniques du mouvement au moyen de quatre coordonnées symétriques, parmi lesquelles les distances mutuelles entre les trois points (§ 1).

Cette fonction hamiltonienne contient une forme quadratique non diagonalisée dans les moments; en outre les équations canoniques qu'on en dérive ne sont pas régularisées pour les chocs doubles.

Mettant à profit des coordonnées périmétriques introduites par Monseigneur Lemaître, nous transformons la fonction hamiltonienne de F.D. Murnaghan et nous obtenons une fonction régularisée pour les chocs binaires (§ 2).

Ensuite, par des transformations élémentaires (passage à des coordonnées polaires sphériques et projection stéréographique), nous arrivons à une fonction lagrangienne et une fonction hamiltonienne associée qui nous semble marquer des avantages décisifs sur les fonctions correspondantes de F.D. Murnaghan :

1°) la forme quadratique dans les vitesses et la forme adjointe correspondante sont diagonalisées;

2°) la fonction hamiltonienne est régularisée pour les chocs binaires;

3°) le moment polaire figure parmi les variables canoniques, ce qui équivaut à faire figurer l'identité de Lagrange parmi les équations du mouvement, une fois la réduction faite par l'intégrale des aires;

4°) la fonction hamiltonienne s'adresse à toute fonction de forces

qui ne dépend que des distances, et pas seulement à la seule fonction des forces gravifiques. (§ 3 et 4).

Les calculs littéraux sont fort longs; si nous avions dû, dans chaque cas, indiquer la meilleure manière d'aboutir aux expressions sous la forme la plus symétrique et la plus simplifiée que nous avons cru pouvoir leur donner, nous aurions augmenté démesurément le volume de cet article.

A propos des réductions que nous effectuons ici pour le problème des trois corps, nous avons eu de nombreuses conversations avec Monseigneur Lemaître; nous l'en remercions vivement.

Mademoiselle Hélène De Laet a bien voulu vérifier avec nous quelques-uns de nos calculs les plus lourds.

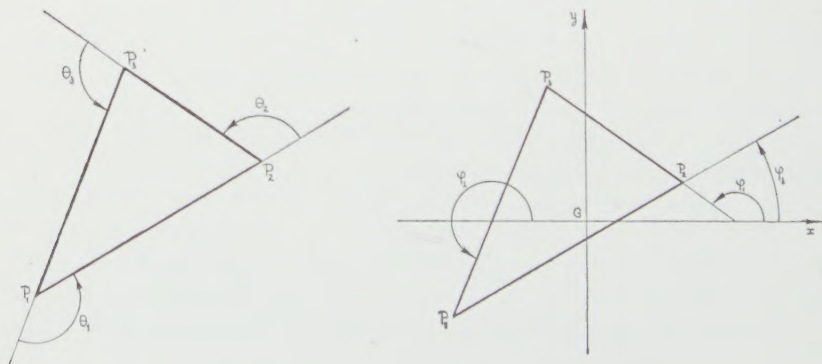
Ce travail reprend à sa manière l'équivalence établie par Monsieur l'Abbé Steenbeckeliers et Madame Deprit-Bartholomé entre la fonction hamiltonienne en coordonnées symétriques de A. Wintner et les fonctions hamiltoniennes de Monseigneur Lemaître.

Soient trois points  $P_i$  affectés chacun respectivement d'une masse  $m_i > 0$ . On suppose que les trois points demeurent dans un plan fixe et qu'ils sont soumis à des forces dérivables d'une fonction de forces  $U$  qui ne dépend que des distances mutuelles entre les points.

C'est pourquoi le moment cinétique  $\vec{C}$  du système est un vecteur constant perpendiculaire au plan du mouvement et le centre de gravité  $G$  se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme.

Dans le plan du mouvement, on choisit un repère barycentrique  $Gxy$  de telle manière que l'orientation définie dans le plan par ce repère induise sur le triangle des masses l'orientation  $P_1P_2P_3$ .

Pour des raisons de concision, nous conviendrons que, toutes les fois que, dans une relation, une définition ou un énoncé, le triplet  $(i, j, k)$  figure au complet, il sera entendu, sauf mention explicite du contraire, qu'il parcourt l'ensemble des permutations paires effectuées sur l'ensemble  $(1, 2, 3)$ .



# 1. Coordonnées symétriques de F. D. Murnaghan

Si  $\theta_j$  représente l'angle que le vecteur  $\overrightarrow{P_i P_j}$  fait avec le vecteur  $\overrightarrow{P_j P_k}$ , alors

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i \leq 3} \theta_i = 0, \quad (2) \quad \frac{\sin \theta_i}{\rho_i} = \frac{2 \Delta}{\rho_1 \rho_2 \rho_3}, \quad (3) \quad \cos \theta_i = \frac{\rho_i^2 - \rho_j^2 - \rho_k^2}{2 \rho_j \rho_k};$$

$\Delta$  représentant l'aire du triangle  $P_1 P_2 P_3$  est définie par la relation

$$16 \Delta^2 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)(\rho_2 + \rho_3 - \rho_1)(\rho_3 + \rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2 - \rho_3).$$

Si  $\varphi_i$  représente l'angle que le vecteur  $\overrightarrow{P_j P_k}$  fait avec l'axe  $Gx$ , alors

$$\theta_i = \varphi_k - \varphi_j, \quad \rho_i \cos \varphi_i = x_k - x_j, \quad \rho_i \sin \varphi_i = y_k - y_j.$$

Du fait que l'origine du repère est le centre de gravité, on a que

$$(2_1) \quad x_i = \frac{1}{\mu} (m_k \rho_j \cos \varphi_j - m_j \rho_k \cos \varphi_k)$$

$$(2_2) \quad y_i = \frac{1}{\mu} (m_k \rho_j \sin \varphi_j - m_j \rho_k \sin \varphi_k),$$

$\mu$  représentant évidemment la masse totale  $m_1 + m_2 + m_3$  du système.

On pose

$$m_0 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mu},$$

et l'on trouve que les éléments non nuls du tenseur d'inertie barycentrique sont :

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} m_i x_i^2 = I_{11} = m_0^2 \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{m_i} \rho_i^2 \cos^2 \varphi_i,$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} m_i x_i y_i = I_{12} = m_0^2 \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{m_i} \rho_i^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i,$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} m_i y_i^2 = I_{22} = m_0^2 \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{m_i} \rho_i^2 \sin^2 \varphi_i,$$

$$I_{11} + I_{22} = J = m_0^2 \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{m_i} \rho_i^2;$$

enfin l'on observe que

$$I_{11} I_{22} - I_{12}^2 = 4 m_0^2 \Delta^2.$$

Il peut être utile de savoir que la distance  $d_i$  du point  $P_i$  au barycentre est donnée par la relation

$$(3) \quad \mu^2 d_i^2 = m_j^2 m_k^2 \left( \frac{\rho_j^2}{m_j^2} + \frac{\rho_k^2}{m_k^2} - 2 \frac{\rho_j}{m_j} \cdot \frac{\rho_k}{m_k} \cos \theta_l \right).$$

Pour fixer la position du triangle dans le plan, au lieu de l'un quelconque des angles  $\varphi_i$ , on introduit leur moyenne arithmétique :

$$\varphi = \frac{1}{3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3),$$

ce qui entraîne que

$$(4) \quad \varphi_i = \varphi + \frac{1}{3} (\theta_j - \theta_k).$$

( $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \varphi$ ) sont les *coordonnées symétriques* d'un système de trois points matériels, telles qu'elles furent introduites par F. D. Murnaghan [1] et modifiées par E. R. Van Kampen et A. Wintner [2]. Au moyen de ces coordonnées symétriques, on peut calculer par (3) et (4) les coordonnées polaires du point  $P_i$  dans le repère  $Gxy$ , tandis que (2<sub>1</sub>) et (2<sub>2</sub>) en donnent les coordonnées cartésiennes.



Puisque les dérivées par rapport au temps des angles extérieurs sont

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\rho_i}{2\Delta}(\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_j \cos \theta_k + \dot{\rho}_k \cos \theta_j),$$

les angles de position ont pour dérivée par rapport au temps

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi} + \frac{1}{6\Delta}(\dot{\rho}_i(\rho_k \cos \theta_j - \rho_j \cos \theta_k) + \dot{\rho}_j(\rho_k \cos \theta_i - \rho_i) - \dot{\rho}_k(\rho_j \cos \theta_i - \rho_k)).$$

Ces relations permettent d'exprimer la norme du moment cinétique

$$\Gamma = \sum_{1 \leq i \leq 3} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \frac{1}{2\mu} \sum_{(i,j,k)} m_j m_k \dot{\rho}_i^2 \dot{\varphi}_i$$

et l'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) = \frac{1}{2\mu} \sum_{(i,j,k)} m_j m_k (\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\varphi}_i^2),$$

au moyen des coordonnées symétriques. En effet, à la condition de poser

$$(5) \quad A_i = \frac{1}{4\Delta} \left\{ \frac{m_0}{J} \rho_i \left( \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \rho_j^2 - \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_k^2 \right) - \frac{\rho_j^2 - \rho_k^2}{3\rho_i} \right\},$$

on trouve que

$$(6) \quad \Gamma = J \left( \dot{\varphi} + \sum_{1 \leq i \leq 3} A_i \dot{\rho}_i \right),$$

$$(7) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} h_{ij} \dot{\rho}_i \dot{\rho}_j + J \dot{\varphi} \sum_{1 \leq i \leq 3} A_i \dot{\rho}_i + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

où les coefficients  $h_{ij}$  sont fonctions seulement des côtés  $\rho_i$ .

Puisque la fonction des forces ne dépend que des distances, la variable  $\varphi$  est ignorable. Dès lors les équations lagrangiennes sont équivalentes à celles déduites de la fonction lagrangienne obtenue à partir de (7) selon la méthode de Routh, ce qui donne

$$(8) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{ij} \dot{\rho}_i \dot{\rho}_j + \Gamma \sum_{1 \leq l \leq 3} A_l \dot{\rho}_l - \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J},$$

étant entendu que

$$(9_1) \quad g = \frac{1}{m_0^2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{m_i} \sin^2 \theta_i = \frac{4J\Delta^2}{m_0^4 c_0^2 c_2^2 c_3^2},$$

$$(9_2) \quad g_{ii} = \frac{1}{g} \left( \frac{1}{m_0^2} + \frac{1}{m_i} \sin^2 \theta_i \right),$$

$$(9_3) \quad g_{jk} = \frac{1}{g} \left( \frac{\sin \theta_j}{m_j} \cdot \frac{\sin \theta_k}{m_k} + \frac{\cos \theta_i}{m_0^2} \right).$$

La matrice  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  a pour inverse la matrice  $(g^{ij})$  dont les coefficients sont

$$(10_1) \quad g^{ii} = \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k},$$

$$(10_2) \quad g^{jk} = - \frac{\cos \theta_i}{m_i}.$$



Puisque

$$\det (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = g \geq 0,$$

$$\operatorname{tr} (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \sum_{1 \leq i \leq 3} g_{ii} \geq 0,$$

$$\operatorname{tr} (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \sum_{1 \leq i \leq 3} g^{ii} = 2 \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{m_i} \geq 0,$$

sont des fonctions numériques positives, la forme quadratique

$$(11) \quad ds^2 = \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{ij} d\rho_i d\rho_j$$

est définie positive, elle munit l'espace des coordonnées  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  d'une structure de variété riemannienne. Désignant par

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial \rho_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \rho_k} \right)$$

les symboles de Christoffel du premier genre et par

$$\Gamma_{jk}^i = \sum_{1 \leq l \leq 3} g^{il} \Gamma_{jkl}$$

les symboles de Christoffel du second genre, on arrive aux expressions suivantes :

$$(12_1) \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{m_0^2 c^2 \rho_i} \left\{ \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} + \frac{\sin^2 \theta_i}{m_i^2} \right\} - g \left( \frac{\sin^2 \theta_i}{m_i} + \frac{\cos^2 \theta_j}{m_j} + \frac{\cos^2 \theta_k}{m_k} \right) \Bigg\},$$

$$(12_2) \quad \Gamma_{jj}^i = \frac{1}{m_0^2 g^2 \rho_i} \left\{ \frac{\sin^2 \theta_j}{m_0^2} \left( \frac{1}{m_j^2} + \frac{\sin^2 \theta_j}{m_j^2} \right) - g \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \right\},$$

$$(12_3) \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{m_0^2 g^2 \rho_i} \left\{ \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} \left( \frac{\cos \theta_k}{m_0^2} + \frac{\sin \theta_i}{m_i} \frac{\sin \theta_j}{m_j} \right) - g \left( \cos \theta_i \frac{\cos \theta_j}{m_j} + \frac{\cos \theta_k}{m_k} \right) \right\},$$

$$(12_4) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{m_0^2 g^2 \rho_i} \left\{ \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} \left( \frac{\cos \theta_i}{m_0^2} + \frac{\sin \theta_j}{m_j} \frac{\sin \theta_k}{m_k} \right) - g \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \cos \theta_i \right\},$$

qu'on peut d'ailleurs encore écrire

$$(13_1) \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{m_0^2 g \rho_i} \left\{ g_{ii} \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} - \left( \frac{\sin^2 \theta_i}{m_i} + \frac{\cos^2 \theta_j}{m_j} + \frac{\cos^2 \theta_k}{m_k} \right) \right\},$$

$$(13_2) \quad \Gamma_{jj}^i = \frac{1}{m_0^2 g \rho_i} \left\{ g_{jj} \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} - \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \right\},$$

$$(13_3) \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{m_0^2 g \rho_i} \left\{ g_{ij} \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} - \left( \cos \theta_i \frac{\cos \theta_j}{m_j} + \frac{\cos \theta_k}{m_k} \right) \right\},$$

$$(13_4) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{m_0^2 g \rho_i} \left\{ g_{jk} \frac{\sin^2 \theta_i}{m_0^2} - \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \cos \theta_i \right\}.$$

Nous pouvons considérer le triplet  $(A_1, A_2, A_3)$  comme les composantes covariantes d'un champ de vecteurs

$\vec{A} \equiv \vec{A}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  dont les composantes contravariantes sont les fonctions numériques

$$(14) \quad A^i = \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} A_j = \frac{1}{3} \left( \frac{\sin \theta_j}{m_j \rho_k} - \frac{\sin \theta_k}{m_k \rho_j} \right);$$

ce champ de vecteurs engendre un champ de tenseurs rot  $\vec{A}$  dont les composantes deux fois covariantes sont :

$$(15) \quad A_{ij} = -A_{ji} = \frac{\partial A_i}{\partial \rho_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \rho_i} = \frac{m_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{\Delta J^2} \rho_k = \frac{2}{m_0^2 g J} \sin \theta_k$$

et dont les composantes mixtes sont

$$(16_1) \quad A_i^j = \sum_{1 \leq l \leq 3} g^{lj} A_{li} = \frac{1}{m_0^2 g J} \left( \frac{\sin 2\theta_j}{m_j} - \frac{\sin 2\theta_k}{m_k} \right),$$

$$(16_2) \quad A_j^i = \sum_{1 \leq l \leq 3} g^{il} A_{lj} = (-1)^{\sigma(i,j,k)} \frac{2}{m_0^2 g J} \left( \frac{\sin \theta_k}{m_k} - \frac{\sin \theta_j}{m_j} \cos \theta_i \right) (*),$$

Pour écrire les équations explicites de Lagrange, il faut encore calculer les composantes contravariantes du champ

$$(17) \quad \begin{aligned} &\text{de vecteurs } \vec{\text{grad}} \left( -\frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} \right): \\ &U^i = \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} \frac{\partial}{\partial \rho_j} \left( -\frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} \right) = \frac{\Gamma^2}{J^2} \rho_i. \end{aligned}$$

(\*) Il est entendu que, dans cette formule, nous contreviendons à la convention initiale :  $(i, j, k)$  parcourt toutes les permutations de l'ensemble  $(1, 2, 3)$  et  $\sigma(i, j, k)$  représente la parité de la permutation donnée  $(i, j, k)$ .



Ainsi les équations lagrangiennes s'écrivent :

$$(18) \quad \ddot{\varphi}_i = \sum_{1 \leq j \leq 3} \sum_{1 \leq k \leq 3} \Gamma_{ij, k} \dot{\varphi}_k + \Gamma_i - \sum_{1 \leq j \leq 3} A_j \dot{\varphi}_j - \frac{\Gamma^2}{J^2} \dot{\varphi}_i - \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial U}{\partial \varphi_j} ;$$

leurs solutions vérifient l'intégrale d'énergie :

$$(19) \quad \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{ij} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} - U = h.$$

Une fois ce système intégré, il reste à effectuer la quadrature

$$(20) \quad \dot{\varphi} = \frac{\Gamma}{J} - \sum_{1 \leq i \leq 3} A_i \dot{\varphi}_i.$$

A partir de la fonction lagrangienne en coordonnées symétriques

$$(21) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \sum_{1 \leq k, l \leq 3} g_{ij} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j + \Gamma \sum_{1 \leq i, j \leq 3} A_i \dot{\varphi}_i - \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} + U,$$

il est facile de déduire la fonction hamiltonienne

$$(22) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} P_i P_j - \Gamma \sum_{1 \leq i \leq 3} A_i P_i + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} - U$$

où  $P_i$  est le moment canoniquement conjugué à la variable  $\varphi_i$  et où  $U$  est la fonction numérique

$$(23) \quad U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{J} + \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{(i,j,k)} \frac{A_i A_j}{m_i} \right) = \frac{1}{18} \sum_{(i,j,k)} \frac{1}{m_i} \left( \frac{1}{\rho_j^2} + \frac{1}{\rho_k^2} - 2 \frac{\cos \theta_j}{\rho_k} \right).$$

Il est plus simple d'introduire les « moments canoniques modifiés »

$$(24) \quad \Pi_i = P_i - A_i \Gamma$$

ce qui permet d'écrire la fonction hamiltonienne sous la forme

$$(25) \quad H^* = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} \Pi_i \Pi_j + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} - U$$

et d'en déduire les équations canoniques sous la forme

$$(26_1) \quad \frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} \Pi_j \quad (26_2) \quad \frac{d\Pi_i}{dt} = - \frac{\partial H^*}{\partial \rho_i} - \Gamma \sum_{1 \leq j \leq 3} A_{ij} \dot{\rho}_j.$$

Pour la suite de cet exposé, il importe de noter que la métrique riemannienne peut se mettre sous une forme plus facile à manier

$$(27_1) \quad ds^2 = \frac{1}{4J} dJ^2 + \frac{m_0 \rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2}{4J \Delta^2} d\sigma^2$$

où la forme différentielle  $d\sigma^2$  est définie par la relation

$$(27_2) \quad d\sigma^2 = \sum_{1 \leq i \leq 3} d\rho_i^2 + 2 \sum_{(i,j,k)} \cos \theta_{ijk} d\rho_i d\rho_j d\rho_k.$$

En guise de vérification, nous proposons de retrouver l'identité de Lagrange. Du fait que

$$\frac{1}{2m_0^2} \ddot{\mathbf{j}} = \frac{\dot{\rho}_1^2}{m_1} + \frac{\dot{\rho}_2^2}{m_2} + \frac{\dot{\rho}_3^2}{m_3} + \frac{\rho_1}{m_1} \ddot{\rho}_1 + \frac{\rho_2}{m_2} \ddot{\rho}_2 + \frac{\rho_3}{m_3} \ddot{\rho}_3,$$

en tenant compte des équations lagrangiennes explicites dans les variables  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , nous calculons que

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} \Gamma_{ij} \frac{\rho_i}{m_i} = \frac{1}{m_j} - \frac{g_{ij}}{m_0^2}, \quad (1 \leq j \leq 3),$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j < k \leq 3} \Gamma_{jk} \frac{\rho_i}{m_i} = - \frac{g_{jk}}{m_0^2}, \quad (1 \leq j < k \leq 3),$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j \neq i} A_j \frac{\rho_i}{m_i} = 0, \quad (1 \leq j \leq 3),$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} g^{ij} \frac{\rho_i}{m_i} = \frac{\rho_j}{m_0^2}, \quad (1 \leq j \leq 3),$$

ce qui entraîne que

$$\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{J}} = \sum_{1 \leq j \leq 3} \sum_{1 \leq i, k \leq 3} g_{jk} \dot{\rho}_i \dot{\rho}_k + \frac{\Gamma^2}{J} + \left( \rho_1 \frac{\partial U}{\partial \rho_1} + \rho_2 \frac{\partial U}{\partial \rho_2} + \rho_3 \frac{\partial U}{\partial \rho_3} \right),$$

ou encore par l'intégrale d'énergie,

$$(28) \quad \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{J}} = 2U + 2h + \left( \rho_1 \frac{\partial U}{\partial \rho_1} + \rho_2 \frac{\partial U}{\partial \rho_2} + \rho_3 \frac{\partial U}{\partial \rho_3} \right).$$



## 2. Coordonnées périmétriques de G. Lemaître

Considérons la transformation de coordonnées

$$\varrho_i = q_j^2 + q_k^2$$

introduite par Monseigneur Lemaître [3].

Dans l'espace des coordonnées  $(q_1, q_2, q_3)$ .

a) l'origine  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$  représente le choc triple;

b) l'axe des  $q_i$  représente les collisions de  $m_j$  avec  $m_k$ ;

c) le plan  $q_1 = 0$  représente les configurations collinéaires où la masse  $m_2$  sépare les masses  $m_1$  et  $m_3$ ; le plan  $q_2 = 0$  représente les configurations collinéaires où la masse  $m_3$  sépare les masses  $m_1$  et  $m_2$ ;

d) le plan  $q_j = q_k$  représente les configurations isocèles où les masses  $m_j$  et  $m_k$  constituent la base du triangle isocèle;

e) la droite  $q_1 = q_2 = q_3$  représente les configurations équilatérales.

Pour la convenance des calculs, on introduit la variable  $q$  définie par la relation

$$(30) \quad q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \rho_i &= q^2 - q_i^2, & 2q^2 &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, & 2q_i^2 &= \rho_j + \rho_k - \rho_i, \\ \Delta &= qq_1q_2q_3, & 1 + \cos \theta_i &= 2 \frac{q_j q_k}{\rho_j \rho_k}, & \cos \theta_j + \cos \theta_k &= -2 \frac{q_j q_k}{\rho_j \rho_k} \frac{\rho_j + \rho_k}{\rho_i}, \\ & & 1 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 &= -4 \frac{q_1 q_2 q_3}{\rho_1 \rho_2 \rho_3}. \end{aligned}$$

Appliquant les règles ordinaires du calcul tensoriel, on constate que les composantes contravariantes de la métrique riemannienne se transforment dans les fonctions

$$(31_1) \quad g^{ii} = \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} \left( q^2 \frac{\rho_i}{m_i} + q_j^2 \frac{\rho_k}{m_k} + q_k^2 \frac{\rho_j}{m_j} \right),$$

$$(31_2) \quad g^{jk} = - \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} q_j q_k \frac{\rho_i}{m_i}$$

et que ses composantes covariantes deviennent

$$(32_1) \quad g_{ii} = \frac{4 m_0^4}{J q^2} \left( \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{m_0^3} \rho_i + q^2 q_i^2 \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) \right),$$

$$(32_2) \quad g_{jk} = \frac{4 m_0^4}{J q^2} q_j q_k \left( \frac{\rho_1}{m_1} \frac{\rho_2}{m_2} \frac{q_3^2}{m_3} + \frac{\rho_2}{m_2} \frac{\rho_3}{m_3} \frac{q_1^2}{m_1} + \frac{\rho_3}{m_3} \frac{\rho_1}{m_1} \frac{q_2^2}{m_2} + \frac{\rho_i}{m_i} q^2 \right).$$

Mentionnons que la forme quadratique  $d\sigma^2$  se met sous une forme particulièrement heureuse

$$(33_1) \quad d\sigma^2 = \frac{16 \Delta^2}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} (dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2 - dq^2)$$

en sorte que la métrique riemannienne s'écrit encore

$$(32_2) \quad ds^2 = \frac{1}{4J} dJ^2 + 4 \frac{m_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J} (dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2 - dq^2).$$

Les symboles de Christoffel du second genre associés à la métrique sont

$$(34_1) \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{q_i} + q_i \left\{ \frac{g_{ii}}{2J} + \frac{m_0}{Jq_i^2} \left[ \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_j \rho_k - \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \rho_i \rho_j - \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_i \rho_k \right] \frac{\rho_i}{q_i^2} + \frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_k} - \frac{4m_0}{J} \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) \right\}$$

$$(34_2) \quad \Gamma_{ij}^i = q_j \left\{ \frac{g_{ij}}{2J} \frac{q_i}{q_j} + \frac{m_0}{Jq_j^2} \left[ \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \rho_i \rho_j + \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_i \rho_k - \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_j \rho_k \right] + \frac{1}{\rho_k} - \frac{2m_0}{J} \left( \frac{\rho_i}{m_i} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) \right\},$$

$$(34_3) \quad \Gamma_{jj}^j = \frac{q_j}{q_i} \left\{ \frac{g_{jj}}{2J} \frac{q_i}{q_j^2} + \frac{m_0}{Jq_j^2} \left[ \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_j \rho_k - \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \rho_i \rho_j - \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_i \rho_k \right] \frac{\rho_j}{q_j^2} + \frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{\rho_i} \right\},$$

$$(34_4) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{q_j q_k}{q_i} \left\{ \frac{g_{jk}}{2J} \frac{q_i}{q_j q_k} + \frac{m_0}{Jq_i^2} \left[ \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \rho_i \rho_j + \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_i \rho_k - \left( \frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_k} \right) \rho_j \rho_k \right] - \frac{1}{\rho_i} \right\}.$$

Le champ de vecteurs  $\dot{A}$  a maintenant pour composantes contravariantes

$$(35) \quad A^i = \frac{1}{6} \frac{q}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2} q_j q_k \left[ \frac{\rho_i}{m_i} (q_j^2 - q_k^2) - \frac{\rho_j}{m_j} (q_i^2 + q_k^2) + \frac{\rho_k}{m_k} (q_i^2 + q_j^2) \right]$$

et pour composantes covariantes

$$(36) \quad A_i = \frac{2}{3} \frac{m_0}{Jq} \frac{q_j q_k}{\rho_j \rho_k} \left[ \frac{\rho_i}{m_i} (q_j^2 - q_k^2) - \frac{\rho_j}{m_j} (2q_i^2 + q_k^2 - q_j^2) + \frac{\rho_k}{m_k} (2q_i^2 + q_j^2 - q_k^2) \right];$$

son rotationnel a pour composantes deux fois covariantes

$$(37) \quad A_{ij} = 8 \frac{m_0}{J^2 q} \rho_1 \rho_2 \rho_3 q_k,$$



et pour composantes mixtes

$$(38_1) \quad A_i^j = 2 \frac{m_0}{J^2 q} q_1 q_3 q_3 \left( \frac{\rho_k}{m_k} - \frac{\rho_j}{m_j} \right),$$

$$(38_2) \quad A_j^i = 2 \frac{m_0}{J^2 q} q_i^2 q_k \left( \frac{\rho_i}{m_i} - \frac{\rho_k}{m_k} \right) + 2 \frac{1}{J q} q_k,$$

$$(38_3) \quad A_i^j = -2 \frac{m_0}{J^2 q} q_j^2 q_k \left( \frac{\rho_i}{m_i} - \frac{\rho_k}{m_k} \right) - 2 \frac{1}{J q} q_k.$$

Enfin, les composantes contravariantes du champ de vecteurs grad  $\left( \frac{1}{J}, \frac{\Gamma^2}{J} \right)$  deviennent

$$(39) \quad U^i = \frac{1}{J} \frac{\Gamma^2}{J} q_i.$$

Dans ces conditions, les équations lagrangiennes s'écrivent

$$(40) \quad \ddot{q}_i + \sum_{1 \leq j \leq 3} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k + \Gamma_i^j \sum_{1 \leq j \leq 3} A_j^i \dot{q}_j - \frac{1}{J} \frac{\Gamma^2}{J} q_i = \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} \frac{\partial U}{\partial q_j};$$

leurs solutions vérifient l'intégrale d'énergie

$$(41) \quad \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{J} \frac{\Gamma^2}{J} - U = h.$$

Une fois intégré ce système, il reste à effectuer la quadrature

$$(42) \quad \dot{\phi} = \frac{\Gamma}{\mathbf{j}} - \sum_{1 \leq i \leq 3} \mathbf{A}^i \dot{q}_i.$$

Ici aussi, à titre de vérification, nous proposons de retrouver l'identité de Lagrange. Parce que

$$\frac{1}{2 m_0^2} \ddot{\mathbf{j}} = 4 \sum_{(i,j,k)} \frac{1}{m_i} (q_j \dot{q}_j + q_k \dot{q}_k)^2 + 2 \sum_{(i,j,k)} \dot{q}_i^2 \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) + 2 \sum_{(i,j,k)} q_i \ddot{q}_i \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right),$$

les relations (\*)

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} q_i \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) \Gamma_{il}^i = - \frac{g_{il}}{2 m_0^2} + 2 q_l^2 \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_q} \right) + \left( \frac{\rho_p}{m_p} + \frac{\rho_q}{m_q} \right),$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} q_i \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) \Gamma_{lp}^i = - \frac{g_{lp}}{2 m_0^2} + 2 q_l q_p \frac{1}{m_q},$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} q_i \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) \mathbf{A}_l^i = 0,$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} q_i \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right) g_{il}^i = \frac{q_l}{4 m_0^2}$$

(\*) L'ensemble d'indices  $(l, p, q)$ , à l'instar de l'ensemble  $(i, j, k)$ , parcourt les permutations cycliques paires de l'ensemble  $(1, 2, 3)$ .

entraînent que

$$\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{J}} = \sum_{1 \leq i \leq 3} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\Gamma^2}{J} + \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} + q_3 \frac{\partial U}{\partial q_3} \right)$$

ou encore, compte tenu de l'intégrale d'énergie,

$$(43) \quad \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{J}} = 2U + 2h + \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} + q_3 \frac{\partial U}{\partial q_3} \right).$$

A partir de la fonction lagrangienne en coordonnées périmétriques

$$(44) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \Gamma \sum_{1 \leq i \leq 3} A_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} + U,$$

on construit la fonction hamiltonienne dans les coordonnées  $q_i$  et leurs moments canoniquement conjugués  $Q_i$  :

$$(45) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} g^{ij} Q_i Q_j - \Gamma \sum_{1 \leq i \leq 3} A_i Q_i + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} - U$$

où la fonction numérique  $I$  se transforme en la fonction

$$(46) \quad I = \frac{1}{18} \left[ 2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) \frac{J}{m_0^2} - 3 \left( \frac{\rho_1^4}{m_1} + \frac{\rho_2^4}{m_2} + \frac{\rho_3^4}{m_3} \right) \right].$$

Si l'on introduit les moments modifiés

$$(47) \quad K_i = Q_i - A_i \Gamma,$$



la fonction hamiltonienne devient

$$(48) \quad H^* = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} K_i K_j + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{j} - U$$

et elle donne lieu aux équations du mouvement

$$(49_1) \quad \frac{d q_i}{d t} = \sum_{1 \leq j \leq 3} g^{ij} K_j \quad (49_2) \quad \frac{d K_i}{d t} = - \frac{\partial H^*}{\partial q_i} - \Gamma \sum_{1 \leq j \leq 3} A_{ij} \dot{q}_j .$$

Telle qu'elle se présente en coordonnées périmétriques, la métrique riemannienne  $g^{ij}$  suggère de substituer à la variable indépendante  $t$  la variable uniformisante

$$(50) \quad u \equiv u(t) = \int^t \frac{dv}{\rho_1(v) \rho_2(v) \rho_3(v)}$$

valable pour toute paire de masses en collision et quel que soit l'instant du choc double.

Dans ces conditions, les solutions  $q_i(t)$  et  $Q_i(t)$  des équations canoniques déduites de  $H$  et qui sont relatives à la constante d'énergie  $h$  sont identiques aux solutions  $q_i(u)$  et  $Q_i(u)$ , qui sont relatives à la constante d'énergie  $\tilde{h} = 0$ , des équations canoniques

$$(51_1) \quad \frac{d q_i}{d u} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \quad (51_2) \quad \frac{d Q_i}{d u} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_i}$$

qu'on déduit de la fonction hamiltonienne

$$\tilde{H} = (H - h) \rho_1 \rho_2 \rho_3$$

Plus explicitement,  $\tilde{H}$  est la fonction

$$(52) \quad \tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} \tilde{g}^{ij} K_i K_j + \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \left( \frac{\Gamma^2}{j} - 2h - 2U \right) ;$$

la métrique riemannienne

$$\widetilde{ds}^2 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 ds^2$$

a pour composantes contravariantes

$$(53_1) \quad \widetilde{g}^{it} = \frac{1}{4} \left( q^2 \frac{\rho_i}{m_i} + q_j^2 \frac{\rho_k}{m_k} + q_k^2 \frac{\rho_j}{m_j} \right),$$

$$(53_2)$$

$$\widetilde{g}^{ij} = -\frac{1}{4} q_i q_j \frac{\rho_k}{m_k},$$

pour déterminant

$$(54)$$

$$\widetilde{g} = \frac{1}{64} \frac{J q^2}{m_0^3} \rho_1 \rho_2 \rho_3,$$

et pour composantes covariantes

$$(55_1) \quad \widetilde{g}_{it} = \frac{1}{16} \frac{1}{\widetilde{g}} \left( \frac{1}{m_0^2} \rho_i^2 \rho_j \rho_k + q^2 q_i^2 \left( \frac{\rho_j}{m_j} + \frac{\rho_k}{m_k} \right)^2 \right),$$

$$(52_2) \quad \widetilde{g}_{ij} = \frac{q_i q_j}{16 \widetilde{g}} \left( \frac{1}{m_0^2} q_1^2 q_2^2 q_3^2 + q^2 \frac{\rho_k}{m_k^2} \left( \frac{q_1}{m_2 m_3} + \frac{q_2}{m_3 m_1} + \frac{q_3}{m_1 m_2} \right) \right).$$

Enfin les équations du mouvement s'écrivent

$$(56_1) \quad \frac{dq_i}{du} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial K_i} = \sum_{1 \leq j < k} \widetilde{g}^{ij} K_j K_k, \quad \frac{dK_i}{du} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_i} = -\Gamma \sum_{1 \leq j < k} A_{ij} \frac{dq_k}{du},$$

leurs solutions vérifient la relation

$$(57) \quad \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} \widetilde{g}^{ij} \mathbf{K}_i \mathbf{K}_j + \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \left( \frac{\Gamma^2}{J} - 2h - 2U \right) = 0;$$

une fois intégrées les équations du mouvement, il reste à effectuer la quadrature

$$(58) \quad \frac{d\varphi}{du} = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\Gamma}{J} - \sum_{1 \leq i \leq 3} A^i \frac{dq_i}{du}.$$

Dans le cas particulier où  $\Gamma = 0$ , alors  $\mathbf{K}_i = \mathbf{Q}_i$  et l'on retrouve pour  $\hat{\mathbf{H}}$  la fonction hamiltonienne de [3; p. 767].

### 3. Coordonnées périmétriques sphériques

Nous passons maintenant aux coordonnées polaires sphériques

$$(59_1) \quad q_1 = q \cos \lambda \cos \beta \quad (59_2) \quad q_2 = q \sin \lambda \cos \beta \quad (59_3) \quad q_3 = q \sin \beta$$

introduites par Monsieur Lemaître à propos de [4].

Il est clair que

$$\rho_1 = q^2 (1 - \cos^2 \lambda \cos^2 \beta) \quad \rho_2 = q^2 (1 - \sin^2 \lambda \cos^2 \beta) \quad \rho_3 = q^2 \cos^2 \beta.$$

La métrique riemannienne a maintenant pour composantes contravariantes

$$(60_1) \quad g^{qq} = \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} q^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} + \frac{\rho_2}{m_2} + \frac{\rho_3}{m_3} - \frac{J}{m_0^2 q^2} \right),$$

$$(60_2) \quad g^{q\lambda} = \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} q \cos \lambda \sin \lambda \left( \frac{\rho_2}{m_2} - \frac{\rho_1}{m_1} \right),$$

$$(60_3) \quad g^{q\beta} = \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} q \tan \beta \left( \frac{J}{m_0^2 q^2} - \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right),$$

$$(60_4) \quad g^{\lambda\lambda} = \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} \sec^2 \beta \frac{J}{m_0^2 q^2},$$

$$(60_5) \quad g^{\lambda\beta} = 0,$$

$$(60_6) \quad g^{\beta\beta} = \frac{1}{4 \rho_1 \rho_2 \rho_3} \frac{J}{m_0^2 q^2};$$

ses composantes covariantes sont

$$(61_1) \quad g_{qq} = 4 \frac{J}{q^2},$$

$$(61_2) \quad g_{q\lambda} = 4 m_0^2 q \sin \lambda \cos \lambda \cos^2 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right),$$

$$(61_3) \quad g_{q\beta} = 4 m_0^2 q \sin \beta \cos \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right),$$

$$(61_4) \quad g_{\lambda\lambda} = 4 \frac{m_0^2 q^2}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos^2 \beta + 4 \frac{m_0^4 q^2}{J} \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \cos^4 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right)^2,$$



$$(61_5) \quad g_{\lambda\beta} = 4 \frac{m_0 q}{J} \sin \lambda \cos \lambda \sin \beta \cos^3 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right),$$

$$(61_6) \quad g_{\beta\beta} = 4 \frac{m_0 q}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3 + 4 \frac{m_0 q}{J} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right)^2.$$

Du fait que

$$\frac{\partial J}{\partial q} = \frac{4J}{q},$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 4m_0^2 q^2 \sin \lambda \cos \lambda \cos^2 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = 4m_0^2 q^2 \sin \beta \cos \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right),$$

on voit tout de suite que les composantes covariantes de la métrique sont aussi de la forme

$$g_{qq} = \frac{1}{4J} \left( \frac{\partial J}{\partial q} \right)^2,$$

$$g_{q\lambda} = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial \lambda} = \frac{1}{4J} \frac{\partial J}{\partial q} \frac{\partial J}{\partial \lambda},$$

$$g_{q\beta} = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial \beta} = \frac{1}{4J} \frac{\partial J}{\partial q} \frac{\partial J}{\partial \beta},$$

$$g_{\lambda\lambda} = 4 \frac{m_0 q}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos^2 \beta + \frac{1}{4J} \left( \frac{\partial J}{\partial \lambda} \right)^2,$$

$$g_{\lambda\beta} = \frac{1}{4J} \frac{\partial J}{\partial \lambda} \frac{\partial J}{\partial \beta},$$

$$g_{\beta\beta} = 4 \frac{m_0 q}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3 + \frac{1}{4J} \left( \frac{\partial J}{\partial \beta} \right)^2,$$

d'où il résulte que

$$(62) \quad ds^2 = \frac{1}{4J} dJ^2 + 4 \frac{m_0 q}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3 (\cos^2 \beta d\lambda^2 + d\beta^2).$$

Nous avons calculé dans les coordonnées  $(q, \lambda, \beta)$  les symboles de Christoffel du second genre associés à la métrique; nous les reproduisons ici non seulement par souci d'être complet, mais encore pour donner au lecteur l'occasion de constater qu'à première vue les coordonnées périmétriques polaires ne sont pas à recommander dans le traitement du problème plan des trois corps.

$$\Gamma_{qq}^q = 0; \quad \Gamma_{q\lambda}^q = 0; \quad \Gamma_{q\beta}^q = 0;$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^q = \frac{2m_0 q}{J^2} \left[ \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{m_0^2} + \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) q_1^2 q_2^2 \right] - \frac{2}{Jq} \left[ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \rho_1 \rho_2 + \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \rho_2 \rho_3 + \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} \right) \rho_3 \rho_1 \right] + \frac{2}{q} q_1 q_2^2 \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right);$$

$$\Gamma_{\lambda\beta}^q = \frac{4}{J^2} \cos^2 \beta \left[ \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\rho_2}{m_2} + \frac{\rho_3}{m_3} \right)^2 - \frac{1}{\rho_2} \left( \frac{\rho_1}{m_1} + \frac{\rho_3}{m_3} \right)^2 + \frac{\rho_1}{m_1} (\rho_2 + \rho_3) - \frac{\rho_2^2}{m_2} (\rho_1 + \rho_3) \right];$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^q = -\frac{4}{J^2} q \cos^2 \beta \left[ 2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) q^2 + \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{J^2}{m_0^4} \right];$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^{\lambda} = 0; \quad \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} = \frac{2}{q}; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = 0;$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} = q_1 q_2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right);$$

$$\Gamma_{\lambda\beta}^{\lambda} = \frac{m_0 q_3}{J q \cos \beta} \left[ \frac{J}{m_0^2} \left( \frac{q_1}{\rho_1} + \frac{q_2}{\rho_2} \right) - 2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} + \frac{\rho_2}{m_2} \right) q^2 \right];$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\lambda} = \frac{m_0^2}{J q_1 q_2 \cos^2 \beta} \left[ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \rho_1 \rho_2 (\rho_1 + \rho_2) \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \rho_2^2 \rho_3 + \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) \rho_1^2 \rho_3 \right] + \frac{q^2 q_3}{q_1 q_2 \cos^2 \beta} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right);$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta} = 0; \quad \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta} = 0; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} = \frac{2}{q};$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^{\beta} = \frac{m_0 \cos \beta}{J q q_3} \left[ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \rho_1 \rho_2 (\rho_1 + \rho_2) \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \rho_2^2 \rho_3 + \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) \rho_1^2 \rho_3 \right] + \frac{q_1 q_2 \cos \beta}{q q_3} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right);$$

$$\Gamma_{\lambda\beta}^{\beta} = \frac{m_0 q_1 q_2}{J} \left[ 2 \left( \frac{\rho_2}{m_2} - \frac{\rho_1}{m_1} \right) + \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{J}{m_0^2} \right];$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\beta} = \frac{m_0 q_3}{J q^3 \cos \beta} \left[ \frac{J}{m_0^2} \left( \frac{q_1}{\rho_1} + \frac{q_2}{\rho_2} - q_3^2 \right) - 2 q^2 \frac{\rho_3}{m_3} \right].$$

→

Le champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  a maintenant pour composantes contravariantes

$$(63_1) \quad A^q = \frac{1}{6} \frac{q_1 q_2 q_3}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2} \left[ \rho_1 \rho_2 \left( \frac{\rho_2}{m_2} - \frac{\rho_1}{m_1} \right) + \rho_2 \rho_3 \left( \frac{\rho_3}{m_3} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) + \rho_3 \rho_1 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_3}{m_3} \right) \right],$$

$$(63_2) \quad A^\lambda = \frac{1}{6} \frac{q_1 q_2}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2} \left[ \frac{\rho_1^2}{m_1} (q^2 + q_1^2 - 2q_2^2) + \frac{\rho_2^2}{m_2} (q^2 + q_2^2 - 2q_1^2) - \frac{\rho_3^2}{m_3} (q^\lambda + q_3^\lambda) \right],$$

$$(63_3) \quad A^\beta = \frac{1}{6} \frac{q_1 q_2 \cos \gamma}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2} \left[ -\frac{\rho_1^2}{m_1} (q^\lambda + q_1^\lambda + 2q_3^\lambda) + \frac{\rho_2^2}{m_2} (q^\lambda + q_2^\lambda + 2q_3^\lambda) + \frac{\rho_3^2}{m_3} (q_1^\lambda - q_2^\lambda) \right],$$

et pour composantes covariantes

$$(64_1) \quad A_q = 0$$

$$(64_2) \quad A_\lambda = \frac{2}{3} \frac{m_0 q_1 q_3}{J \rho_1 \rho_2} \left[ \frac{\rho_1^2}{m_1} (q^2 + q_1^2 - 2q_2^2) + \frac{\rho_2^2}{m_2} (q^2 + q_2^2 - 2q_1^2) - \frac{\rho_3^2}{m_3} (q^\lambda + q_3^\lambda) \right],$$

$$(64_3) \quad A_\beta = \frac{2}{3} \frac{m_0 q_1 q_2}{J \rho_1 \rho_2} \sec \alpha \left[ \frac{\rho_1^2}{m_1} (q^\beta + q_1^\beta + 2q_3^\beta) + \frac{\rho_2^2}{m_2} (q^\beta + q_2^\beta + 2q_1^\beta) + \frac{\rho_3^2}{m_3} (q_1^\beta - q_2^\beta) \right];$$

son rotationnel a pour composantes deux fois covariantes

$$(65_1) \quad A_{q\lambda} = -A_{\lambda q} = 0,$$

$$(65_2) \quad A_{q\beta} = -A_{\beta q} = 0,$$

$$(65_3) \quad A_{\lambda\beta} = -A_{\beta\lambda} = 8 \frac{m_0}{J^2} \rho_1 \rho_2 \rho_3 q^2 \cos \beta$$

et pour composantes mixtes

$$(66_1) \quad A_q^q = 0,$$

$$(66_2) \quad A_\lambda^q = 2 \frac{m_0 q}{J^2} \sin \beta \cos^2 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right) = -\frac{1}{2} q \cos \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{J} \right),$$

$$(66_3) \quad A_\beta^q = 2 \frac{m_0 q}{J^2} \sin \lambda \cos \lambda \cos \beta \left( \frac{\rho_2}{m_2} - \frac{\rho_1}{m_1} \right) = \frac{1}{2} q \sec \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{J} \right),$$

$$(66_4) \quad A_q^\lambda = 0, \quad (66_7) \quad A_q^\beta = 0,$$

$$(66_5) \quad A_\lambda^\lambda = 0, \quad (66_8) \quad A_\lambda^\beta = -\frac{2 \cos \beta}{J},$$

$$(66_6) \quad A_\beta^\lambda = \frac{2}{J \cos \beta}, \quad (66_9) \quad A_\beta^\beta = 0.$$

Enfin, les composantes contravariantes du champ de vecteurs  $\text{grad} \left( -\frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} \right)$  devient

$$(67_1) \quad U^q = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J^2} q, \quad (67_2) \quad U^\lambda = 0, \quad (67_3) \quad U^\beta = 0.$$

#### 4. Le moment polaire d'inertie comme variable canonique

Le paragraphe précédent nous a appris qu'à la variable  $q$  il convient de substituer le moment polaire d'inertie  $J$ .

La jacobienne de la transformation  $(J, \lambda, \beta) \rightarrow (q, \lambda, \beta)$  nous est déjà connue puisque nous avons calculé les dérivées partielles de  $J$  par rapport aux variables  $q, \lambda, \beta$ ; ainsi la jacobienne inverse transposée nous fournit les dérivées partielles de  $q$  par rapport aux variables  $J, \lambda, \beta$ , c'est-à-dire

$$\frac{\partial q}{\partial J} = \frac{q}{4J},$$

$$\frac{\partial q}{\partial \lambda} = -\frac{m_1 m_2 q}{J} \cos \lambda \sin \lambda \cos^2 \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right),$$

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = -\frac{m_1 m_2 q}{J} \sin \beta \cos \beta \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right).$$

Comme nous l'avons déjà vu, dans les variables  $(J, \lambda, \beta)$ , la métrique riemannienne est diagonalisée et a pour composantes covariantes

$$(68_1) \quad g_{JJ} = \frac{1}{4J},$$

$$(68_2) \quad g_{\lambda\lambda} = \frac{4m_1 m_2 q}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos^2 \beta, \quad (69_3) \quad g_{\beta\beta} = \frac{4m_1^2 m_2^2 q}{J} \rho_1 \rho_2 \rho_3;$$

d'où l'on calcule que les composantes contravariantes sont

$$(69_1) \quad g^{JJ} = 4J, \quad (69_2) \quad g^{\lambda\lambda} = \frac{J}{4m_1^2 m_2^2 q \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos^2 \beta}, \quad (69_3) \quad g^{\beta\beta} = \frac{J}{4m_1^2 m_2^2 q \rho_1 \rho_2 \rho_3}.$$



Pour le cas où l'on aurait à se servir des équations du mouvement sous forme lagrangienne explicite, nous avons calculé les symboles de Christoffel du second genre associés à la nouvelle métrique :

$$\Gamma_{jj}^j = -\frac{1}{2j} ;$$

$$\Gamma_{j\lambda}^j = 0 ; \quad \Gamma_{j\beta}^j = 0 ;$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^j = -\frac{{}^2_2 m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{j} \cos^2 \beta ;$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^j = -\frac{{}^2_2 m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{j} ;$$

$$\Gamma_{jj}^\lambda = 0 ;$$

$$\Gamma_{j\lambda}^\lambda = \frac{1}{2j} ; \quad \Gamma_{j\beta}^\lambda = 0 ;$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^\lambda = \frac{m_0 q^2}{j} \cos^2 \beta \cos \lambda \sin \lambda \left[ \frac{j}{m_0^2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) \right] ;$$

$$\Gamma_{\lambda\beta}^\lambda = \frac{{}^2_2 m_0 q^2}{j} \cos \beta \sin \beta \left[ \frac{j}{m_0^2} \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \lambda}{\rho_2} - \frac{2}{\rho_3} \right) - 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right) \right] ;$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^\lambda = -\frac{{}^2_2 m_0 q^2}{j} \cos \lambda \sin \lambda \left[ \frac{j}{m_0^2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) \right] ;$$

$$\Gamma_{jj}^\beta = 0 ;$$

$$\Gamma_{j\lambda}^\beta = 0 ;$$

$$\Gamma_{j\beta}^\beta = \frac{1}{2j} ;$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^{\beta} = -\frac{m_0 q}{J} \cos^3 \beta \sin \beta \left[ \frac{J}{m_0^2} \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \lambda}{\rho_2} - \frac{2}{\rho_3} \right) - 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right) \right];$$

$$\Gamma_{\lambda\beta}^{\beta} = \frac{m_0 q}{J} \cos^2 \beta \cos \lambda \sin \lambda \left[ \frac{J}{m_0^2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) \right];$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\beta} = \frac{m_0 q}{J} \cos \beta \sin \beta \left[ \frac{J}{m_0^2} \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \lambda}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right) - 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right) \right].$$

Du champ de vecteurs  $\vec{A}$ , nous connaissons déjà les composantes  $A_{\alpha}$ ,  $A_{\beta}$  et  $A^{\alpha}$ ,  $A^{\beta}$ ; en outre, nous avons calculé que

$$(70) \quad A_J = 0, \quad A^J = 0.$$

Quant au rotationnel de ce champ, il a pour composantes deux fois covariantes *non nulles*

$$(71) \quad A_{\lambda\beta} = -A_{\beta\lambda} = \frac{8m_0 q}{J} \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \cos \beta$$

et pour composantes mixtes non nulles

$$(72) \quad A_{\lambda}^{\beta} = -\frac{2}{J} \cos \beta, \quad (72_2) \quad A_{\beta}^{\lambda} = \frac{2}{J \cos \beta}.$$

Enfin les composantes contravariantes du champ de vecteurs  $\vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{J} \right)$  sont

$$(73_1) \quad U^J = 2 \frac{\Gamma^2}{J}, \quad (73_2) \quad U^{\lambda} = 0, \quad (73_3) \quad U^{\beta} = 0.$$

On constate facilement que l'équation lagrangienne explicite en J, compte tenu de toutes les relations qui précèdent, a la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{J}} - 2(g_{JJ}\dot{\mathbf{J}}^2 + g_{\lambda\lambda}\dot{\lambda}^2 + g_{\beta\beta}\dot{\beta}^2) - 2\frac{\Gamma^2}{\mathbf{J}} = g^{JJ}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{J}},$$

d'où il résulte que c'est identiquement l'identité de Lagrange

$$(74) \quad \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{J}} = 2(\mathbf{U} + h) + 2\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{J}},$$

puisque les solutions du problème vérifient l'intégrale d'énergie

$$\frac{1}{2}(g_{JJ}\dot{\mathbf{J}}^2 + g_{\lambda\lambda}\dot{\lambda}^2 + g_{\beta\beta}\dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{\mathbf{J}} - \mathbf{U} = h.$$

La fonction lagrangienne du problème s'écrit

$$(75) \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\mathbf{J}}\dot{\mathbf{J}}^2 + \frac{4m_0^2g_{12}^2g_{12}g_{23}}{\mathbf{J}}(\dot{\lambda}^2\cos^2\beta + \dot{\beta}^2)\right) + \Gamma(A_\lambda\dot{\lambda} + A_\beta\dot{\beta}) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{\mathbf{J}} + \mathbf{U}.$$

Si l'on note

$$p_J = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{J}}}, \quad p_\lambda = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\lambda}}, \quad p_\beta = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\beta}}$$

les moments canoniquement conjugués aux variables (J, λ, β), et si l'on introduit les « moments canoniques modifiés »

$$\varpi_\lambda = p_\lambda - \Gamma A_\lambda \quad \text{et} \quad \varpi_\beta = p_\beta - \Gamma A_\beta,$$

on peut déduire de la fonction lagrangienne L la fonction hamiltonienne

$$(76) \quad \mathbf{H}^* = \frac{1}{2}\left(4\mathbf{J}p_J^2 + \frac{\mathbf{J}}{4m_0^2g_{12}^2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\left(-\frac{\varpi_\lambda^2}{\cos^2\beta} + \varpi_\beta^2\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{\mathbf{J}} - \mathbf{U}.$$

A la variable indépendante  $t$ , on substitue la variable uniformisante

$$(77) \quad s \equiv s(t) = \int^t \frac{J(\tilde{t}) d\tilde{t}}{4m_0^2 q^2(\tilde{t}) \rho_1(\tilde{t}) \rho_2(\tilde{t}) \rho_3(\tilde{t})}$$

Dans ces conditions, les fonctions de  $t$  qui sont les solutions des équations canoniques déduites de  $\mathbf{H}$  et qui sont relatives à la constante d'énergie  $h$  sont identiques aux fonctions de  $s$  qui sont les solutions des équations canoniques

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{ds} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial p_J}, & \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \varpi_\lambda}, & \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \varpi_\beta}, \\ \frac{dp_J}{ds} &= -\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial J}, & \frac{d\varpi_\lambda}{ds} &= -\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \lambda} - \Gamma A_{\lambda\beta} \frac{d\beta}{ds}, & \frac{d\varpi_\beta}{ds} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \gamma} - \Gamma A_{\beta\gamma} \frac{d\gamma}{ds}, \end{aligned}$$

déduites de la fonction hamiltonienne

$$(78) \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\varpi_\lambda^2}{\cos^2 \beta} + \varpi_\beta^2 \right) + 2m_0^2 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \left( 4\rho_J^2 + \frac{\Gamma^2}{J^2} - 2 \frac{U}{J} - 2 \frac{h}{J} \right)$$

et qui vérifient l'intégrale d'énergie

$$\tilde{\mathbf{H}} = 0.$$

Or, ces équations canoniques prennent une forme relativement simple. En effet, du fait que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J} (q_1^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3) &= \frac{2q_1^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J}, \\ \frac{\partial}{\partial J} \left( \frac{q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J} \right) &= \frac{q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial J} \left( \frac{q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3) = \frac{2q^4 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J} \cos \lambda \sin \lambda \cos^2 \beta \left[ J \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - 4m_0^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3) = \frac{2q^4 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J} \cos \beta \sin \beta \left[ J \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \lambda}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right) - 4m_0^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right) \right],$$

il résulte que

$$(79_1) \quad \frac{dp_J}{ds} = \frac{4m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J} \left( -4p_J^2 + \frac{1}{J} (U + h) + \frac{\partial U}{\partial J} \right),$$

$$(79_2) \quad \frac{dJ}{ds} = 16m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 p_J,$$

$$(79_3) \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\varpi_\lambda}{\cos^2 \beta},$$

$$(79_4) \quad \frac{d\beta}{ds} = \varpi_\beta, \quad q^2 \cos \lambda \sin \lambda \cos^2 \beta \left[ 4p_J^2 + \frac{U^2}{J^2} - 2 \frac{1}{J} (U + h) \right] \left[ J \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - 4m_0^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} - \frac{\rho_2}{m_2} \right) \right]$$

$$(79_5) \quad \frac{d\varpi_\lambda}{ds} = - \frac{4m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J} \left\{ + 2 \frac{\Gamma}{J} \cos \beta \cdot \varpi_\beta \right\} - \frac{\partial U}{\partial \lambda}$$

$$\begin{aligned}
 (79_6) \quad \frac{d\varpi_\beta}{ds} = & \left( -\frac{4m_0q}{j} \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{j} \right) \left( -2 \frac{\Gamma}{j} \frac{\varpi_\lambda}{\cos \beta} \right) \left( -\frac{\partial U}{\partial \beta} \right) \\
 & - \frac{\sin \beta}{\cos^3 \beta} \frac{\varpi_\lambda^2}{\lambda} \\
 & + q^2 \cos \beta \sin \beta \left[ 4p_1^2 \cdot \frac{\Gamma^2}{j^2} - 2 \frac{1}{j} (U + h) \right] \left[ j \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \lambda}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right) \right. \\
 & \left. - 4m_0^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} \cos^2 \lambda + \frac{\rho_2}{m_2} \sin^2 \lambda - \frac{\rho_3}{m_3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Pour terminer, nous passons selon les indications de [1] aux variables  $x$  et  $y$  définies par les relations

$$(80_1) \quad x = \frac{q_1}{q + q_3} = \cos \lambda \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta},$$

$$(80_2) \quad y = \frac{q_2}{q + q_3} = \sin \lambda \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta},$$

ce qui entraîne que

$$(81_1) \quad q_1 = q \frac{2x}{1 + x^2 + y^2},$$

$$(81_2) \quad q_2 = q \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$(81_3) \quad q_3 = q \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

$$(82_1) \quad \lambda = \arctan \frac{y}{x},$$

$$(82_2) \quad \beta = \arcsin \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Cette projection stéréographique se prolonge en une transformation complètement canonique engendrée par la fonction

$$f \equiv f(x, y, p_\lambda, p_\beta) = p_\lambda \arctan \frac{y}{x} + p_\beta \arcsin \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$



laquelle définit la transformation des moments conjugués

$$(83_1) \quad p_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} p_\lambda - 2 \frac{x}{(1 + x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} p_\beta,$$

$$(83_2) \quad p_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} p_\lambda - 2 \frac{y}{(1 + x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} p_\beta,$$

et la transformation inverse

$$(84_1) \quad p_\lambda = x p_y - y p_x,$$

$$(84_2) \quad p_\beta = -\frac{1}{2} \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x p_x + y p_y).$$

Dans les coordonnées  $(J, x, y)$ , la métrique riemannienne devient

$$(85) \quad ds^2 = \frac{1}{4J} dj^2 + \frac{16m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1 + x^2 + y^2)^3} (dx^2 + dy^2),$$

ou en composantes contravariantes

$$(86) \quad ds^2 = 4J p_j^2 + \frac{J(1 + x^2 + y^2)^2}{16m_0^2 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3} (p_x^2 + p_y^2).$$

Si l'on pose

$$(87_1) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{q^6} \left[ \frac{\rho_1}{m_1} (q^2 + q_1^2 - 2q_2^2) + \frac{\rho_2^2}{m_2} (q^2 + q_2^2 - 2q_1^2) - \frac{\rho_3^2}{m_3} (q^2 + q_3^2) \right],$$

$$(87_2) \quad \Psi^*(x, y) = \frac{1}{q^6} \left[ -\frac{\rho_1^2}{m_1} (q^2 + q_1^2 + 2q_3^2) + \frac{\rho_2^2}{m_2} (q^2 + q_2^2 + 2q_3^2) + \frac{\rho_3^2}{m_3} (q_1^2 - q_2^2) \right],$$

on constatera que le champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  a pour composantes contravariantes

$$(88_1) \quad \mathbf{A}^J = 0$$

$$(88_2) \quad \mathbf{A}^x = \frac{1}{6} \frac{m_0 q^8}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2 (1 + x^2 + y^2)^2} \left[ y(1 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)\Phi - 4xy^2\Phi' \right],$$

$$(88_3) \quad \mathbf{A}^y = \frac{1}{6} \frac{q^8}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2 (1 + x^2 + y^2)^2} \left[ x(1 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)\Phi - 4xy^2\Phi' \right],$$

et pour composantes covariantes

$$(89_1) \quad \mathbf{A}_J = 0$$

$$(89_2) \quad \mathbf{A}_x = \frac{2}{3} \frac{m_0 q^8}{J \rho_1 \rho_2 (1 + x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2)} \left[ y(1 - x^2 - y^2)(1 - x^2 - y^2)\Phi - 4xy^2\Phi' \right],$$

$$(89_3) \quad \mathbf{A}_y = \frac{2}{3} \frac{m^2 q^8}{J \rho_1 \rho_2 (1 + x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2)} \left[ x(1 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)\Phi - 4xy^2\Phi' \right],$$

son rotationnel a pour composantes deux fois covariantes

$$(90_1) \quad \mathbf{A}_{Jx} = -\mathbf{A}_{xJ} = 0,$$

$$(90_2) \quad \mathbf{A}_{Jy} = -\mathbf{A}_{yJ} = 0,$$

$$(90_3) \quad \mathbf{A}_{xy} = -\mathbf{A}_{yx} = \frac{32m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J^2 (1 + x^2 + y^2)^2},$$

et pour composantes mixtes non nulles

$$(91_1) \quad A_y^x = \frac{2}{J}, \quad (91_2) \quad A_x^y = -\frac{2}{J}.$$

Enfin les composantes contravariantes du champ de vecteurs  $\text{grad} \left( -\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{J} \right)$  deviennent

$$(92_1) \quad U^J = 2 \frac{\Gamma^2}{J}, \quad (92_2) \quad U^x = 0, \quad (92_3) \quad U^y = 0.$$

Pour la nouvelle métrique riemannienne, on a calculé les symboles de Christoffel du second genre

$$\Gamma_{1,1}^1 = \frac{1}{2J},$$

$$\Gamma_{Jx}^1 = \Gamma_{Jy}^1 = \Gamma_{xy}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{xx}^J = \Gamma_{yy}^J = -\frac{32m_0q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\Gamma_{Jx}^x = \Gamma_{Jy}^x = \Gamma_{Jx}^y = \Gamma_{Jy}^y = 0,$$

$$\Gamma_{Jx}^x = \Gamma_{Jy}^y = \frac{1}{2J}$$

$$\Gamma_{xx}^x = -\Gamma_{yy}^x = \Gamma_{xy}^y = \frac{4m_0q^2}{J} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^3} \left[ 4 \left( \frac{\rho_1}{m_1} (1-x^2+y^2) - 2 \frac{\rho_2}{m_2} y^2 - \frac{\rho_3}{m_3} (1-x^2-y^2) \right) - \frac{J}{m_0^2} \left( \frac{y^2}{1-x^2+y^2} - 2 \frac{y^2}{\rho_1} - \frac{1-3x^2-3y^2}{\rho_2} \right) \right]$$

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_{xz} = \Gamma_{xy} \frac{4m_0^2 q^2}{J} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^3} \left[ 4 \left( -2 \frac{\rho_1^2}{m_1} x^2 + \frac{\rho_2^2}{m_2} (1+x^2-y^2) - \frac{\rho_3^2}{m_3} (1-x^2-y^2) \right) - \frac{J}{m_0^2} \left( -2 \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{1+x^2-y^2}{\rho_2} - \frac{1-3x^2-3y^2}{\rho_3} \right) \right]$$

La fonction lagrangienne du problème s'écrit

$$(93) \quad L = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4J} \dot{\mathbf{j}}^2 + \frac{16m_0 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1+x^2+y^2)^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right) + \Gamma (A_x \dot{x} + A_y \dot{y}) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} + U$$

et elle engendre, si l'on pose

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

$$\varpi_x = p_x - \Gamma A_x$$

$$\varpi_y = p_y - \Gamma A_y,$$

la fonction hamiltonienne

$$(94) \quad H^* = \frac{1}{2} (4J p_j^2 + \frac{J(1+x^2+y^2)^2}{16m_0^2 q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3} (\varpi_x^2 + \varpi_y^2)) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{J} - U.$$

A la variable indépendante  $t$ , on substitue la variable uniformisante

$$(95) \quad w = w(t) = \int^t \frac{J(\tilde{t})(1+x^2(\tilde{t})+y^2(\tilde{t}))^2}{16m_0^2 q^2(\tilde{t}) \rho_1(\tilde{t}) \rho_2(\tilde{t}) \rho_3(\tilde{t})} d\tilde{t},$$

grâce à quoi les équations du mouvement sont les équations canoniques

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dw} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_J}, & \frac{dx}{dw} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varpi_x}, & \frac{dy}{dw} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varpi_y}, \\ \frac{dp_J}{dw} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial J}, & \frac{d\varpi_x}{dw} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} - \Gamma A_{xy} \frac{dy}{dw}, & \frac{d\varpi_y}{dw} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} - \Gamma A_{yx} \frac{dx}{dw},\end{aligned}$$

qu'on dérive de la fonction hamiltonienne

$$(96) \quad \tilde{H} = \frac{1}{2}(\varpi_x^2 + \varpi_y^2) + \frac{8mq^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{(1+x^2+y^2)^2} \left( 4p_J^2 + \frac{\Gamma^2}{J^2} - \frac{2}{J}(U+h) \right),$$

les solutions vérifiant l'intégrale d'énergie

$$\tilde{H} = 0$$

Or ces équations canoniques prennent ici encore une forme relativement simple. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{(1+x^2+y^2)^2} \right) &= \frac{8q^4 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1+x^2+y^2)^5} x \left[ 4m_0^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1} (1-x^2+y^2) - 2 \frac{\rho_2}{m_2} y^2 - \frac{\rho_3}{m_3} (1-x^2-y^2) \right) \right. \\ &\quad \left. J \left( \frac{1-x^2+y^2}{\rho_1} - 2 \frac{y^2}{\rho_2} - \frac{1-3x^2-3y^2}{\rho_3} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{(1+x^2+y^2)^2} \right) &= \frac{8q^4 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1+x^2+y^2)^5} y \left[ 4m_0^2 \left( -2 \frac{\rho_1}{m_1} x^2 + \frac{\rho_2}{m_2} (1+x^2-y^2) - \frac{\rho_3}{m_3} (1-x^2-y^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - J \left( -2 \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{1+x^2-y^2}{\rho_2} - \frac{1-3x^2-3y^2}{\rho_3} \right) \right]\end{aligned}$$

d'où il suit que

44

$$(97_1) \quad \frac{dJ}{dw} = \frac{64mq^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{(1+x^2+y^2)^2} J, \quad$$

$$(97_2) \quad \frac{dp_J}{dw} = \frac{16mq^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1+x^2+y^2)^2} \left[ -4p_J^2 + \frac{1}{J}(U+h) + \frac{\partial U}{\partial J} \right], \quad$$

$$(97_3) \quad \frac{dx}{dw} = \varpi_x, \quad \frac{dy}{dw} = \varpi_y, \quad (97_4) \quad$$

$$(97_5) \quad \frac{d\varpi_x}{dw} = -\frac{16mq^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1+x^2+y^2)^2} \left\{ \frac{4q^2 x}{(1+x^2+y^2)^3} \left[ 4p_J^2 + \frac{\Gamma^2}{J^2} - 2\frac{1}{J}(U+h) \right] \left[ 4m_0^2 \left( \frac{\rho_1}{m_1}(1-x^2+y^2) - 2\frac{\rho_2}{m_2}y^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_3}{m_3}(1-x^2-y^2) \right) - J \left( \frac{1-x^2+y^2}{\rho_1} - 2\frac{y^2}{\rho_2} - \frac{1-3x^2-3y^2}{\rho_3} \right) \right] + 2\frac{\Gamma}{J}\varpi_y - \frac{\partial U}{\partial x} \right\}$$

$$(97_6) \quad \frac{d\varpi_y}{dw} = -\frac{16mq^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{J(1-x^2-y^2)^2} \left\{ \frac{4q^2 y}{(1+x^2+y^2)^3} \left[ 4p_J^2 + \frac{\Gamma^2}{J^2} - 2\frac{1}{J}(U+h) \right] \left[ 4m_0^2 \left( -2\frac{\rho_1}{m_1}x^2 + \frac{\rho_2}{m_2}(1+x^2-y^2) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_3}{m_3}(1-x^2-y^2) \right) - J \left( -2\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{1-x^2-y^2}{\rho_2} - \frac{1-3x^2-3y^2}{\rho_3} \right) \right] - 2\frac{\Gamma}{J}\varpi_x - \frac{\partial U}{\partial y} \right\}.$$

## RÉFÉRENCES

- [1] F. D. MURNAGHAN, A symmetric reduction of the planar Three-Body Problem, *American Journal of Mathematics* **58** (1936), p. 829-832.  
 [2] E. R. VAN KAMPEN and A. WINTNER, On a symmetrical canonical reduction of the problem of three bodies, *American Journal of Mathematics* **59** (1937), p. 153-166 et p. 269.  
 [3] G. LEMAITRE, Régularisation dans le problème des trois corps, *Bull. Cl. Sc., Académie royale de Belgique* **40** (1954), p. 759-767.  
 [4] E. DE VYLDER, *Les variables régularisantes du Chanoine Lemaitre et la théorie de la Lune de Pontécoulant*, Mémoire présenté à l'Université de Louvain pour obtenir le grade de licencié en sciences 1958, 118 pp.



Deuxième Section

SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Sur les aberrations périaxiales de l'œil. II

PAR

A. BIOT

SOMMAIRE. Supposant que l'indice du cristallin, dans l'œil théorique de Y. Le Grand, varie avec la distance à l'axe de figure, on examine une méthode de calcul simplifiée des aberrations et diverses lois de variation. On est amené à étudier une loi de la forme simple  $n^2 = n_0^2 + by^2$  dans laquelle  $n_0$  est l'indice sur l'axe. On établit l'équation numérique du rayon courbe dans le cristallin pour 6 hauteurs d'incidence sur la cornée de rayons parallèles faisant un angle d'environ  $5^\circ$  avec l'axe. On calcule ensuite les hauteurs d'intersection de ces rayons avec le plan focal image. Le minimum de dispersion de ces points a lieu pour  $b$  voisin de  $+0,000668$ . Il y a alors une correction notable des mêmes aberrations calculées pour l'œil théorique ordinaire. Cette correction s'étend même au-delà de la zone de diamètre 4 mm.

1. *Le problème.* Dans un travail précédent <sup>(1)</sup> nous avons précisé et calculé les aberrations géométriques que l'on rencontre en la fovéa de l'œil théorique de Y. Le Grand (non accommodé). Nous avons en particulier recherché les hauteurs d'intersection, dans le plan focal image, de rayons incidents qui devraient se rencontrer en la fovéa s'il n'y avait pas d'aberration. Celles que l'on trouve ainsi sont plus grandes que celles que l'on observe sur l'œil réel. Supposant que l'indice, dans le cristallin, varie avec la distance à l'axe de figure, nous recherchons une méthode de calcul et une loi de variation compatible avec les observations.

2. *Etude préliminaire.* a) Le même problème a été étudié en supposant que les rayons lumineux restent rectilignes dans le cristallin. Il faut pour cela supposer, pour chaque hauteur d'intersection avec

<sup>(1)</sup> A. BIOT, *Ann. Soc. Scien. Brux.*, 74, 175-188, 1960.

la cornée par exemple, que l'indice reste constant mais est différent selon la hauteur.

Ce mode de traitement ne suit évidemment pas la réalité car les rayons réels sont courbes dans l'hypothèse d'une variation continue de l'indice. On voit de suite qu'il est toujours possible, si l'on opère de la sorte, de trouver un mode de variation de l'« indice » tel que toute loi d'aberration pourra être retrouvée. On voit aussi que l'« indice » ainsi défini doit finalement *diminuer* quand la hauteur d'intersection sur le cristallin augmente à partir de l'axe, de chaque côté. En effet, dans l'œil théorique, l'aberration est sensiblement sous-correctée : les rayons sont trop réfractés. Pour qu'ils le soient moins, conformément aux observations, il est indispensable que l'indice diminue et d'autant plus qu'on s'écarte de l'axe.

b) Tenant compte de la courbure du rayon, on peut supposer, par exemple, que la loi de variation est linéaire pour l'indice ou le carré de l'indice (la différence est faible en pratique car le coefficient de proportionnalité est très petit). On prendra ici, comme en 18) dans le travail précédent

$$n^2 = n_0^2 (1 + ay)$$

$n_0$  étant l'indice sur l'axe. Dans ce cas, le calcul numérique montre d'abord que pour obtenir une variation de l'aberration dans le sens d'une correction il faut prendre  $a > 0$  c'est-à-dire que l'indice doit augmenter avec la distance à l'axe. On constate ensuite que la variation de la hauteur d'intersection avec le plan focal est sensiblement constante quel que soit le rayon incident considéré. Or cela ne se peut car on obtiendrait ainsi deux « images » dans le plan focal. Il sera impossible de trouver une valeur de  $a$  qui rende compte des observations.

c) La loi de variation

$$n^2 = n_0^2 - by^2$$

qui donne dans le cristallin le rayon courbe 21) du travail précédent ne peut non plus être adoptée car on constate, par le calcul numérique, qu'elle conduit à une augmentation de l'aberration.

### 3. Etude de l'application de la loi $n^2 = n_0^2 + by^2$ .

Il est utile de voir comment se font les calculs numériques.

Le premier élément à connaître est la hauteur  $h_e$  d'intersection à l'entrée du rayon choisi avec le cristallin. Cette valeur se déduit du calcul classique effectué pour ce rayon sur l'œil théorique normal. Mise à la place de  $y$  dans la relation qui donne l'indice on calcule la valeur  $n_e$  de ce dernier à l'entrée. On suppose que le cristallin possède cet indice et, par les formules classiques, on calcule la réfraction du

rayon incident. On possède de la sorte l'angle  $\omega_e$  avec l'axe de la tangente à l'entrée au rayon courbe. On détermine alors la constante  $C$  de la réfraction  $C = n_e \sin i_e = n_e \cos \omega_e$ .

On peut maintenant calculer l'équation du rayon. La forme générale de cette équation est (I, (20))

$$x + C^{te} = \pm \frac{C}{M\sqrt{b}} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + (n_0^2 - C^2)/b}) \quad (1)$$

Nous connaissons  $M$ ,  $C$  et  $b$  (que nous nous sommes donnés). Reste à déterminer la  $C^{te}$ . Pour cela nous supposons que, pour  $x = 0$ , on ait  $y = y_0$ . Il nous faut placer l'origine. Nous la placerons sur l'axe, à l'intersection de celui-ci avec la corde  $2h_e = 2y_0$ . Par rapport au premier sommet du cristallin, l'origine se trouve au-delà, à une distance égale à la flèche qui correspond à cette corde, c'est-à-dire à

$$f_{l1} = R_{1c} - \sqrt{R_{1c}^2 - y_0^2} \quad (2)$$

et la valeur de la constante s'écrit

$$C^{te} = \pm \frac{C}{M\sqrt{b}} \text{Log}_{10} (y_0 + \sqrt{y_0^2 + (n_0^2 - C^2)/b}) \quad (3)$$

l'abscisse  $x_1$  de la deuxième surface du cristallin étant, en mm

$$x_1 = 4 - f_{l1} \quad (4)$$

Il est utile de transformer la quantité sous le radical dans (1) et dans (3). On a, en général,

$$y^2 + (n_0^2 - C^2)/b = (n_0^2 + by^2 - C^2)/b = (n^2 - C^2)/b = (n^2 - n^2 \cos^2 \omega)/b = n^2 \sin^2 \omega/b \quad (5)$$

D'où

$$C^{te} = \pm \frac{C}{M\sqrt{b}} \text{Log}_{10} (y_0 + n_e \sin \omega_e/b) \quad (6)$$

C'est par cette relation que l'on calculera la valeur de la constante d'intégration. Dans le radical de (1) on calculera  $(n_0^2 - C^2)/b$ . La valeur (5) nous servira encore plus loin. Les coefficients numériques de (1) sont maintenant connus.

Il faut actuellement calculer les coordonnées de l'intersection du rayon courbe avec la deuxième surface du cristallin. Cela se fera par approximations successives. On se donnera par exemple une valeur approchée de l'ordonnée  $y_s$  de sortie. Cette valeur pourra être celle que l'on a trouvée à l'aide du calcul effectué avec les éléments de l'œil théorique pour le même rayon incident. Avec cette valeur provisoire de  $y_s$  on calcule d'abord la flèche  $f_{l2}$  correspondante sur le cristallin ( $R_{2c} = 6\text{mm}$ ) et l'on en déduit la valeur  $x'_{l1}$  de l'abscisse du point  $y = y_s$  sur le cercle

$$x'_{l1} = x_1 - f_{l2} \quad (7)$$

On introduit alors la valeur  $y = y_s$  dans l'équation (1) et l'on calcule la valeur  $x'_{12}$  sur le rayon courbe. Si  $y_s$  correspond à l'intersection, on a  $x'_{11} = x'_{12}$ . Dans le cas contraire on affectera  $y_s$  d'une correction  $\Delta y_s$  que l'on pourra en général calculer avec avantage par la relation

$$\Delta y_s = \pm (x'_{11} - x'_{12}) \operatorname{tg} \omega_e \quad (8)$$

Le signe à utiliser se détermine facilement à l'aide d'un croquis de la rencontre du cercle et du rayon. Le troisième essai donne en général des valeurs  $y_s$  et  $x_s$  suffisamment exactes.

On calcule alors l'indice  $n_s$  qui correspond à  $y_s$ , puis par (5), la valeur  $\omega_s$ . Celle-ci est l'angle que fait avec l'axe la tangente au rayon courbe à la sortie du cristallin. Pour achever de déterminer cette tangente, c'est-à-dire le rayon incident sur la seconde surface du cristallin, on calcule la valeur  $q_s$  de l'abscisse par rapport au deuxième sommet du cristallin de l'intersection de cette tangente avec l'axe par la relation

$$q_s = \pm (y_s / \operatorname{tg} \omega_s \pm f_2) \quad (9)$$

les signes étant à prendre d'après la géométrie du cas considéré.

On est revenu au cas classique des rayons rectilignes. On trouve finalement  $h_t$  dans le plan focal, la valeur que l'on cherche.

4. *Remarques.* a) Si l'on détermine, en se servant de (6), la valeur de  $dy/dx$ , c'est-à-dire celle du coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point  $(x, y)$ , on trouve naturellement

$$dy/dx = \pm \sqrt{n_0^2 - C + y^2/C} \quad (10)$$

Cette valeur est nulle pour

$$y = \sqrt{(n_0^2 - C^2)}$$

Cela ne peut arriver que si  $n_0^2 - C^2$  est négatif.

Le rayon ne possède un minimum dans le milieu cristallin que dans ce cas. Il est important de calculer alors, par (1), la valeur correspondante de  $x_m$  sur le rayon. En pratique, deux cas peuvent se présenter : le minimum se trouve soit effectivement dans le cristallin soit en dehors. Dans ce dernier cas le coefficient angulaire de la tangente au rayon ne change pas de signe dans le cristallin; c'est le signe qui existe en  $x_0 = 0$ . Ce cas se traite comme s'il n'y avait pas de minimum, et l'on applique directement la formule (1). Dans l'autre cas, (1) ne représente le rayon, dans le cristallin, qu'entre  $x_0 = 0$  et  $x_m$ . Pour avoir l'autre partie de la courbe il faut introduire dans (1) le signe moins devant le radical. Cela provient de ce que, lors de l'intégration, on a posé

$$\sqrt{y^2 + (n_0^2 - C^2)/b} = t - y$$

puis élevé au carré et enfin réintroduit cette seule valeur de  $t-y$  après l'intégration alors qu'en fait  $t-y$  correspond à  $\pm\sqrt{y^2+(n_0^2-C^2)/b}$ .

b. Dans le cas où l'on a  $(n_0^2 - C^2)/b < 0$ , on voit facilement que l'on a affaire à un minimum. En effet, puisque l'indice augmente quand  $y$  croît, la concavité du rayon est nécessairement tournée, en raison de la loi de la réfraction, du côté des  $y$  croissants.

c. La valeur de  $n_0^2 - C^2$ ,  $\omega_e$  et  $\omega_s$  peut devenir très petite. On n'obtiendra une précision suffisante qu'en prenant un nombre suffisant de décimales. Nous avons effectué nos calculs par logarithmes à 7 décimales et c'est tout juste suffisant. Non pas tant dans le but d'obtenir des valeurs exactes que pour assurer la cohérence et l'exactitude des tendances de variation des résultats.

5. *Résultats des calculs.* a) Les calculs ont été effectués pour l'indice  $n_D$  et les 6 rayons méridiens utilisés dans le travail précédent. Les hauteurs d'intersection sur la cornée sont  $+1,75$ ;  $+0,8$ ;  $-0,2652$  (passant par le centre de l'iris);  $-0,6815$  (perpendiculaire à la cornée);  $-2,0$ ;  $-2,26$ . L'inclinaison commune de ces rayons sur l'axe optique est de  $5^{\circ}00'34'',3$ . Pour les trois premiers nous avons pris  $Oy$  positif vers le haut; pour les trois autres vers le bas. Dans ces conditions, le calcul montre que le rayon commence par descendre vers l'axe dans le cristallin pour les  $n^{\text{os}}$  1, 4, 5 et 6 et monte pour les  $n^{\text{os}}$  2 et 3.

b) Dans une première série de calculs nous avons pris  $b = b_1 = \{3,1319325\}^{(1)} = 0,00135498$  qui donne pour le rayon 1 une valeur  $n_e = 1,42150$  choisie arbitrairement. Les équations correspondantes des rayons dans le cristallin sont, dans l'ordre, pour les rayons définis ci-dessus

$$x - 24,49393 = - \{1,9489944\} \text{Log}_{10} (y \pm \sqrt{y^2 - 3,133061})$$

$$x + 29,99319 = \{1,9484441\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 0,641078})$$

$$x + 37,99608 = \{1,9474839\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 7,204688})$$

$$x - 49,36370 = - \{1,9470177\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 10,38023})$$

$$x - 72,19765 = - \{1,9451403\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 23,10221})$$

$$x - 74,56213 = - \{1,9448165\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 25,28526})$$

<sup>(1)</sup> Rappelons que  $\{3, 1319325\}$  représente le nombre dont le logarithme vaut  $3, 1319325$ .

Pour le rayon 1 le minimum se trouve dans le cristallin. On a en effet  $x_s = 3,57735$  et  $x_m = 2,44341$ . Dans la première équation il faut mettre le signe + devant le radical avant le minimum et le signe — au-delà.

c) Une seconde série de calculs a été faite en prenant pour  $b$  une valeur égale à la moitié de la précédente :  $b = b_2 = \{4,8309025\} = 0,0006677449$ . Elle correspond, pour le rayon 1 à une valeur  $n_1 = 1,42072$ . Les équations deviennent

$$x - 35,80502 = - \{2,0992805\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 - 3,123296})$$

$$x + 53,94445 = \{2,0988943\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 2,171252})$$

$$x + 72,59618 = \{2,0979989\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 14,40908})$$

$$x - 87,00042 = - \{2,0975227\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 20,89774})$$

$$x - 116,95186 = - \{2,0954818\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 48,54393})$$

$$x - 120,10006 = - \{2,0951185\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 53,43849})$$

Ici aussi le premier rayon seul possède un minimum qui se trouve toutefois en-dehors du cristallin. On a en effet  $x_s = 3,57832$  et  $x_m = 4,72250$ .

d) Remarquons que les valeurs de  $h_i$  données dans le travail précédent correspondent à  $b = 0$ .

e) Groupons en un tableau les valeurs trouvées pour  $h_i$ .

Rayon	$b_1$	Différence	$b_2$	Différence	$b = 0$
1	1,4606	0,0352	1,4248	0,0351	1,3897
2	1,4937	0,0243	1,4694	0,0244	1,4450
3	1,4680	0,0036	1,4644	0,0035	1,4609
4	1,4519	-0,0056	1,4575	-0,0054	1,4629
5	1,4131	-0,0317	1,4631	-0,0318	1,4949
6	1,4378	-0,0346	1,4724	-0,0345	1,5069

6. *Discussion des résultats.* On voit d'abord (on reportera avec avantage les résultats sur un plan ( $h_{\text{cornée}}$ ,  $h_i$ )) que la courbe  $b_2$  se trouve à égale distance des courbes  $b_1$  et  $b = 0$  pour une même valeur de  $h_{\text{cornée}}$  : le déplacement des points de la courbe est proportionnel



à  $b$ . Cela permet de trouver facilement la courbe correspondante à une valeur utile quelconque de  $b$ .

A partir d'une certaine valeur de  $b$ , il y a « correction » pour une ouverture déterminée de la cornée. La correction peut s'étendre au-delà de la zone optique de l'œil c'est-à-dire pour une pupille d'entrée plus grande que 4 mm en diamètre. Pour  $\varnothing = 4$  mm, la valeur optima de  $b$  paraît être un peu plus grande que  $b_2$ .

Pour cette valeur il subsiste une sous-correction marquée pour le rayon 1 qui aborde l'œil le plus loin du côté temporal. Il est intéressant de rapprocher ce fait du résultat de l'observation suivant lequel l'ouverture de l'iris n'est parfois pas centrée sur l'axe optique de l'œil mais est légèrement déplacée du côté nasal.

Les trois courbes  $b = 0, b_1, b_2$  se coupent sensiblement en un même point. Les coordonnées de ce point peuvent se déterminer par tâtonnements numériques. On peut en obtenir plus commodément la position par voie graphique en remplaçant les segments de courbe compris entre les points qui correspondent aux rayons 3 et 4, entre lesquels se trouve un point d'inflexion, par des segments de droite. On trouve ainsi pour l'intersection

$$h_{\text{cornée}} = 0,429 \text{ mm}$$

$$\bar{h}_t = 1,462 \text{ mm}$$

Ce point ne se trouve donc pas sur le rayon qui passe par le centre de l'iris.

Il semble important de remarquer combien une faible différence d'indice entre l'axe et le bord du cristallin peut avoir d'effet sur les aberrations géométriques. On doit s'attendre à trouver, d'un individu à l'autre une forte dispersion dans les résultats des mesures de ces aberrations. Cette observation semble ne pas devoir être faite à l'occasion des mesures de l'aberration chromatique longitudinale.

**7. Conclusion.** La loi de variation  $n^2 = n_0^2 + by^2$  de l'indice dans le cristallin de l'œil théorique permet, malgré sa simplicité, d'aborder avec avantage l'étude de la représentation des aberrations géométriques observées sur l'œil réel en se servant de l'œil théorique. Il serait peut-être illusoire d'introduire un terme supplémentaire dans cette loi, au moins tant que les mesures d'aberrations effectuées sur l'œil réel n'auront pas abouti à des résultats concordants. De toute manière, il est nécessaire de tenir compte de la courbure des rayons dans le cristallin lors des calculs.

SESSION DU 20 AVRIL 1961

à Bruxelles

Première Section

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

# Groupoïdes en relation associative et semigroupes mutuellement associatifs

PAR

Albert SADE

1. *Introduction.* L'idée de considérer des groupoïdes en relation associative a été suggérée par l'étude des quasigroupes finis orthogonaux, c.-à-d. satisfaisant

$$\forall x, y, z, t \quad xy = zt, x \times y = z \times t \Rightarrow x = z, y = t$$

([3], p. 229). On sait que le produit de Mann  $E(*)$  ([7], p. 79, N° 8) de deux quasigroupes orthogonaux  $E(.)$  et  $E(\times)$ ,

$$x*y = (x.y) \times y$$

est encore orthogonal à chacun d'eux. Dès lors, si un produit comme  $(x.y) \times z$  pouvait être remplacé par  $x.(y \times z)$ , il en résulterait une grande souplesse dans les calculs où intervient le produit à droite. On est ainsi conduit à dire que deux groupoïdes  $G = E(.)$  et  $H = E(\times)$ , sur le même ensemble  $E$ , sont *en relation associative* si

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x.y) \times z = x.(y \times z),$$

ce qui sera noté  $G (\mathcal{RA}) H$ .

Cette relation demosienne s'exprime également par la permutabilité des translations

$$\Gamma_x^{(\cdot)} \Delta_z^{(\times)} = \Delta_z^{(\times)} \Gamma_x^{(\cdot)}$$

Si l'on a en plus

$$(x \times y).z = x \times (y.z), \text{ c.-à-d. } H(\mathcal{RA}) G,$$

alors on dira que  $G$  et  $H$  satisfont à l'associativité mutuelle, notée  $G(\mathcal{AM}) H$ .

On trouve de telles relations, par exemple, dans le cas des ringoïdes ([9], p. 47). Les définitions et notations sont celles de [4] et de [5]. Il ne sera question que de groupoïdes homogènes.

2. Exemples. (i) Sur un anneau quelconque,  $A$ , les groupoïdes

$$x.y = f(x) + y,$$

$$x \times y = x + g(y),$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions arbitraires définies sur  $A$ , à valeurs dans  $A$ , sont  $(\mathcal{RA})$ .

(ii) Le semigroupe de Thierrin,  $xy = y$  ([4], p. 153, N° 2, équ. 9) est  $(\mathcal{RA})$  avec tout groupoïde, défini sur le même ensemble.

(iii) Soit  $G = E(\cdot)$  un semigroupe abélien d'ordre  $n$  sur un ensemble  $E$  de  $n$  éléments. Pour que les groupoïdes

$$P = E(\cdot), \quad x \times y = a.x^m.y^p,$$

$$Q = E(*) , \quad x*y = b.x^r.y^q,$$

$a, b, x, y \in E$ . avec  $m, p, q, r$  arbitraires, non nuls, fixes  $\in \mathbb{Z}/n$ , soient  $(\mathcal{RA})$  il faut et il suffit que  $a.b^p = a^r.b$  dans  $G$  et que  $m = mr, q = qp$ , dans  $\mathbb{Z}/n$ .

3. On vérifie sans peine que

(i) Si deux groupoïdes quelconques  $P = E(\cdot)$  et  $Q = E(\times)$ , sur un même ensemble  $E$ , sont  $(\mathcal{RA})$  et s'il existe un élément  $u \in E$  neutre à droite dans l'un et à gauche dans l'autre, alors  $P$  et  $Q$  coïncident. En particulier, deux loops  $(\mathcal{RA})$  avec la même unité, sur le même ensemble, coïncident.

(ii) Si  $J \subseteq E$  satisfait  $\forall x \in E$  à la condition  $J.x = J$  (resp.  $x.J = J$ ) sur  $P$ , alors  $J$  satisfait à la condition  $J \times x = J$  (resp.  $x \times J = J$ ) sur  $Q$ ,  $P$  et  $Q$  étant  $(\mathcal{RA})$ .

(iii) Pour qu'un groupoïde  $G = E(\cdot)$  et son conjoint  $C = E(\times)$  ([4], p. 155, ii), définis sur un même ensemble quelconque  $E$ , satisfassent  $G(\mathcal{RA}) C$ , il faut et il suffit que  $G$  obéisse à la loi de Hosszu  $x.(y.z) = y.(x.z)$  ([2] p. 205).

(iv) Pour qu'un quasigroupe à gauche  $G = E(\cdot)$  et son réciproque  $Q = E(\times)$  soient  $(\mathcal{RA})$  il faut et il suffit que  $G$  soit un semigroupe.

4. Construction. Si, sur un ensemble quelconque  $E$ ,  $P = E(\cdot)$  est

un semigroupe avec unité à droite en relation associative avec un groupoïde  $Q = E(\times)$  sur le même ensemble,  $P(\mathcal{A}\mathcal{A})Q$ , alors

(i) la loi de  $Q$  est  $x \times y = x.f(y)$  où  $f$  est une fonction arbitraire, définie sur  $E$  et prenant ses valeurs dans  $E$ , et réciproquement.

(ii) si, de plus,  $Q$  est cancellable à gauche, alors  $Q$  est l'image de  $P$  par l'isotopie  $T = \{\xi = 1, \eta = y \rightarrow g(y), \zeta = 1\}$ , dont les composantes  $\xi$  et  $\zeta$  sont réduites à l'identique et où  $g$  est la fonction inverse de  $f$ .

*Preuve.* Par hypothèse,  $(x.y) \times z = x.(y \times z)$ .

(i) Soit  $u$  l'unité à droite de  $P$ ; alors

$$(x.u) \times z = x \times z = x.(u \times z),$$

or  $u \times z$  ne dépend que de  $z$  puisque  $u$  est invariable; en posant

$$u \times z = f(z),$$

on a

$$x \times z = x.f(z),$$

où  $f$  est une fonction arbitraire de  $z$ . Réciproquement, si  $x \times z = x.f(z)$ , puisque  $P$  est un semigroupe, on aura

$$(x.y) \times z = (x.y).f(z) = x.y.f(z).$$

D'autre part

$$x.(y \times z) = x.[y.f(z)] = x.y.f(z).$$

(ii) Si  $Q = E(\times)$  est cancellable à gauche,

$$f(z) = f(z') \Leftrightarrow u \times z = u \times z' \Leftrightarrow z = z'$$

et  $f$  est une permutation de  $E$ . Elle a donc une fonction inverse  $g(z)$  et  $Q$  est le produit de  $P$  par l'isotopie de composantes  $\xi = 1$ ,  $\eta = (y \rightarrow g(y))$ ,  $\zeta = 1$ . On a un énoncé analogue si  $Q$  est un semigroupe avec unité à gauche.

5. (i) Deux groupoïdes  $P = E(.)$  et  $Q = E(\times)$ , construits sur le même ensemble  $E$ , sont en relation associative,  $P(\mathcal{A}\mathcal{A})Q$ , si  $T = \{\xi = 1, \eta = \zeta = x \rightarrow x \times m\}$  où  $m$  est un élément fixé quelconque  $\in E$ , est une autotopie de  $P$ , quel que soit  $m$ .

(ii) Un groupoïde  $P = E(.)$  admet un groupoïde  $Q = E(\times)$  en relation associative  $P(\mathcal{A}\mathcal{A})Q$ , si le groupe d'autotopie de  $P$  a un sous-groupe de la forme  $(\xi = 1, \eta = \zeta)$ .

(iii) Pour qu'un quasigroupe  $P = E(.)$ , construit sur un ensemble quelconque  $E$ , admette un groupoïde  $Q = E(\times)$  en relation associative,  $P(\mathcal{A}\mathcal{A})Q$ , il faut et il suffit que  $P$  soit isotope d'un groupe quelconque  $G$ . Alors  $Q$  est un quasigroupe et  $P$  et  $Q$  sont respectivement isotopes de  $G$ , avec les composantes  $(\xi, \eta, \eta)$  et  $(\eta, \lambda, \eta)$ .

*Preuve* (i) Si  $T$  est une autotopie de  $P$  et si  $x.y = z$ , on aura

$$x.(y\eta) = z\zeta,$$

c'est-à-dire

$$x.(y \times m) = z \times m = (x.y) \times m.$$

Cette égalité étant vérifiée quels que soient  $x, y, m$ , le groupoïde  $Q$  est en relation associative avec  $P$ .

(ii) Les autotopies de la forme  $\xi = 1, \eta = \zeta$ , forment évidemment un groupe, celui-ci étant isomorphe au groupe constitué par les composantes  $\eta$ .

(iii) La proposition est une conséquence du théorème ([8], p. 632 N° 7.2; [6] p. 304). On peut toutefois prouver directement que, s'il existe un élément  $u$ , commun à deux groupoïdes  $(\mathcal{RA}) P = E(.)$  et  $Q = E(\times)$ , non singulier à droite [5], dans l'un et à gauche dans l'autre, alors  $P$  et  $Q$  sont isotopes d'un même semigroupe avec élément neutre.

6. *Produit cartésien.* Soit  $(E_i), i \in I$ , une famille d'ensembles,  $P_i$  et  $Q_i$  deux groupoïdes définis sur  $E_i$  et  $\forall i \in I, P_i (\mathcal{RA}) Q_i$ . Alors, si  $P$  est le produit cartésien des  $P_i$  et  $Q$  celui des  $Q_i$ , définis sur le produit cartésien  $E$  des  $E_i$ , on a  $P (\mathcal{RA}) Q$ .

7. *Produit selon  $G(\circ)$ .* Dans [3], N° 4, p. 230, on a défini le produit  $S = E(*)$  de deux groupoïdes quelconques  $P = E(.)$  et  $Q = E(\times)$ , selon un groupoïde  $G = E(\circ)$  par la relation

$$x*y = (x.y) \circ (x \times y), \quad \forall x, y \in E.$$

Si  $P$  et  $Q$  sont  $(\mathcal{RA})$  sur  $E$ , et si  $S = E(*)$  est leur produit selon  $G = E(\circ)$ : (i) quand  $P (\mathcal{RA}) Q$  et quand  $P$  est un semigroupe distributif à gauche par rapport à  $G$ , alors  $P (\mathcal{RA}) S$ ; (ii). Si  $Q (\mathcal{RA}) P$  et si  $Q$  est un semigroupe distributif à gauche par rapport à  $G$ , alors  $Q (\mathcal{RA}) S$ ; (iii) Si  $Q (\mathcal{RA}) P$  et si  $P$  est un semigroupe distributif à droite par rapport à  $G$ , alors  $S (\mathcal{RA}) P$ ; (iv) Si  $P (\mathcal{RA}) Q$  et si  $Q$  est un semigroupe distributif à droite par rapport à  $G$ , alors  $S (\mathcal{RA}) Q$ . Démontrons seulement (i).

Par définition

$$(x.y)*z = [(x.y).z] \circ [(x.y) \times z]$$

$$= [x.(y.z)] \circ [x.(y \times z)]$$

$$x.(y*z) = x.[(y.z) \circ (y \times z)].$$

A cause de la distributivité de  $P$  les derniers membres sont égaux. L'égalité des premiers membres exprime que  $P (\mathcal{RA}) S$ .

8. *Produit à droite.* Appelons produit à droite (Généralisation du

produit de Mann) de deux groupoïdes  $P = E(\cdot)$  et  $Q = E(\times)$  le groupoïde  $T = E(*)$  défini par

$$x*y = (x.y) \times y ; x, y \in E.$$

Un groupoïde est *diagonal* si l'équation  $x.x = a$  a une solution unique en  $x$ ,  $\forall a$ .

Si  $P (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q$ , (i) pour que  $P (\mathcal{R}\mathcal{A}) T$  il faut et il suffit, si  $Q$  est diagonal, que  $P$  soit associatif; (ii) pour que  $Q (\mathcal{R}\mathcal{A}) T$  il faut et il suffit que  $Q (\mathcal{R}\mathcal{A}) P$ ; (iii) Si  $Q$  est self-distributif, alors  $T (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q$ .

Par définition on a

$$A = (x.y)*z = [(x.y).z] \times z$$

et comme  $P (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q$

$$A = (x.y).(z \times z).$$

Ensuite

$$B = x.(y*z) = x.[(y.z) \times z] = x.[y.(z \times z)].$$

Pour tout  $t \in E$ ,  $\exists z$ ,  $z \times z = t$ , puisque  $Q$  est diagonal; donc

$$P (\mathcal{R}\mathcal{A}) T \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow (x.y).t = x.(y.t),$$

et  $P$  est un semigroupe. La preuve est analogue pour les autres parties.

9. *Homomorphisme*. Soit  $T$  une application de l'ensemble  $E$  sur l'ensemble  $E' = E_T$  telle que l'image par  $T$  du groupoïde  $P = E(\cdot)$  soit  $P' = P_T$  et celle de  $Q = E(\times)$ ,  $Q' = Q_T$ . Alors

$$P (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q \Rightarrow P' (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q'.$$

10. *Isotopie*. Soit  $P'$  l'image de  $P = E(\cdot)$  par l'isotopie de composantes  $(\xi, \zeta, \zeta)$  et  $Q'$  celle de  $Q = E(\times)$  par l'isotopie  $(\zeta, \eta, \zeta)$ . Alors

$$P (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q \Rightarrow P' (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q'$$

où  $\xi, \eta, \zeta$  sont des permutations arbitraires de  $E$ .

11. *Transitivité*. La propriété d'être en relation associative est transitive car, soient  $P = E(\cdot)$ ,  $Q = E(\times)$ ,  $S = E(*)$  trois groupoïdes (homogènes) avec  $P (\mathcal{R}\mathcal{A}) Q$  et  $Q (\mathcal{R}\mathcal{A}) S$ ; donc

$$(x.y) \times z = x.(y \times z) ; (x \times y)*z = x \times (y*z).$$

Par suite

$$\begin{aligned} [x.(y \times z)]*t &= [(x.y) \times z]*t = (x.y) \times (z*t) \\ &= x.[y \times (z*t)] = x.[(y \times z)*t]. \end{aligned}$$

Or  $\forall u, \exists y, z$ ,  $y \times z = u$ , donc

$$(x.u)*t = x.(u*t).$$



12. *Associativité mutuelle.* La plupart des propositions précédentes restent valables pour  $1'(\mathcal{A} \mathcal{M})$ . Si deux groupoïdes  $(\mathcal{R} \mathcal{A})$  sont abéliens il est évident qu'ils sont mutuellement associatifs. Pour que deux groupoïdes soient en  $(\mathcal{A} \mathcal{M})$  il faut et il suffit qu'ils soient associatifs.

On trouve encore facilement que si un groupoïde cancellable d'un côté et son conjoint sont en  $(\mathcal{A} \mathcal{M})$  ils coïncident.

Pour qu'un quasigroupe à gauche  $G = E(.)$  et son réciproque  $Q = E(\times)$  soient  $(\mathcal{A} \mathcal{M})$ , il faut et il suffit que  $G$  soit un semigroupe satisfaisant à l'équation de transitivité  $a.b = (a.c).(b.c)$ , ([1], p. 203).  $G$  possède alors une unité à droite unique et tous ses éléments sont unipotents. Si, de plus,  $G$  est cancellable, à gauche, alors il est en outre commutatif.

Si  $P = E(.)$  et  $Q = E(\times)$  sont deux semigroupes en  $(\mathcal{A} \mathcal{M})$ ,  $G = E(o)$  un groupoïde entropique quelconque, sur le même ensemble, et si  $P$  et  $Q$  sont distributifs des deux côtés par rapport à  $G$ , alors (i) leur produit  $H = E(*)$  selon  $G$  est encore distributif bilatère par rapport à  $G$ , (ii)  $H$  est en  $(\mathcal{A} \mathcal{M})$  avec  $P$  et  $Q$ .

La relation d'associativité mutuelle est une équivalence par rapport à l'ensemble  $S$  de tous les semigroupes construits sur un ensemble commun  $E$ . La partition modulo  $(\mathcal{A} \mathcal{M})$  de  $S$  est invariante par toute permutation de  $E$ .

## CITATIONS

- [1] M. HOSSZÚ, On the functional equation of transitivity, *Acta Scient. Math. Szeged*, **15**, (1954), 203-208.
- [2] —, Some functional equations related with the associative law, *Publ. Math. Debrecen*, **3**, (1954), 205-214.
- [3] A. SADE, Groupoïdes orthogonaux, *Publ. Math. Debrecen*, **5**, (1958), 229-240.
- [4] —, Quasigroupes obéissant à certaines lois, *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Ser. A*, **22**, (1957), 151-184.
- [5] —, Système demosien associatif de multigroupoïdes avec un scalaire non singulier, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **73**, (1959), 231-234.
- [6] —, Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **73**, (1959), 302-309.
- [7] —, Théorie des nuclei de groupoïdes et de quasigroupes  $\mathfrak{N}_H$ ,  $\mathfrak{N}_O$ ,  $\mathfrak{N}_C$ , *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Ser. A*, **23**, (1958), 73-104.
- [8] —, Théorie des systèmes demosiens de groupoïdes, *Pacific J. Math.* **10**, (1960), 625-660.
- [9] Th. SKOLEM, The abundance of arithmetic functions satifying some simple functional equations. *Norske Vid. Selsk. Forh.* **29**, (1956), 47-53.

## Un modèle mathématique de système à dissipation du type «structurel»

PAR

F. BUCKENS

### SOMMAIRE

Le modèle mathématique d'un système oscillant à un degré de liberté, à pertes « structurelles », est généralement représenté par une équation linéaire « approchée » du second ordre dont le coefficient d'amortissement est choisi de façon à donner, en régime périodique, une dissipation cyclique proportionnelle au carré de l'amplitude et *indépendante de la fréquence imposée*. On sait que le sens physique de pareil modèle linéaire où le coefficient d'amortissement devrait être inversement proportionnel à la fréquence *imposée*, s'explique par la considération d'un système à amortissement « héréditaire », correspondant en réalité à une équation d'ordre plus élevé, mais dont la linéarité permet, grâce à une transformation de Laplace, de réduire la discussion à celle d'une fonction de transfert ou, si l'on veut, à celle d'un module complexe. Si le schéma est toujours possible à l'égard d'oscillations harmoniques imposées en prescrivant que la dissipation cyclique est une fonction donnée de la fréquence, il perd son sens physique pour les oscillations transitoires lorsqu'on suppose que cette dissipation est complètement indépendante de la fréquence.

La recherche directe d'une force d'amortissement satisfaisant à la condition des pertes cycliques à l'égard des fréquences sous la forme d'une fonction généralisée au sens de Temple-Lighthill, conduit ici, sans introduire de termes de mémoire, à une expression simple, mais effectivement *non linéaire* de l'équation différentielle. La reconstitution des cycles d'hystérésis classiques par l'introduction d'un type assez particulier de mémoire « courte » conduit à une forme plus générale dont la connaissance est précieuse pour l'analyse ultérieure de modèles mathématiques corrects sur machine analogique.

En guise d'application, l'étude des oscillations naturelles amorties, dans le cas particulier d'une forme exacte mais à linéarité « fragmentaire » et symétrique du modèle mathématique, sous la forme :  $m\ddot{x} + k(x + \beta\dot{x} \cdot x/\dot{x})$

0, donne des résultats simples mais exacts qui font apparaître, par rapport à ceux fournis par l'emploi de l'équation linéaire « approchée », de grosses différences, tout au moins en ce qui concerne la variation de la pseudo-pulsation en fonction du coefficient d'amortissement  $\beta$ .

### SUMMARY

The mathematical model of an oscillating system with one degree of freedom, whose energy dissipation under forced oscillations is of the structural type, is usually given by a second order linear equation, the damping



coefficient is then defined by the condition that cyclic dissipation should be proportional to the square of the amplitude and *independent* of the frequency (internal or structural damping). The physical meaning of such a linear model, where the damping coefficient should be inversely proportional to the *imposed* frequency, receives its natural interpretation by introducing an « hereditary » damping, and thus higher derivatives in the equation, and by considering the transfer function after a Laplace transformation.

Such a scheme allows simulating any cyclic dissipation as far as harmonic oscillations are concerned, but runs into difficulties for transient motions, when the dissipation is assumed of the « structural type », i.e. completely independent of frequency.

The search for a damping « force », with cyclic dissipation independent of frequency under the form of a generalised function (in the sense of Temple-Lighthill), leads to a simple but *non-linear* expression of the differential equation. The further introduction of « memory » terms of a special type allows reshaping the solution in accordance to the classical hysteretical cycles, and this lead to a more general form of the model. Its knowledge is valuable, for it makes possible analyzing correct models on analog computers.

As an application, the damping of natural oscillations is studied in the particular but exact case of a « fragmentary » and symmetrical linearity of the mathematical model in its simplest form:  $m\ddot{x} + k(x + \beta\dot{x}|x/\dot{x}|) = 0$ . The solution is straightforward and shows large differences with results obtained from the « approximate » linear model in the behaviour of the pseudo-frequency as a function of the damping coefficient  $\beta$ .

## 1. DISSIPATION STRUCTURALE

La littérature technique consacrée à la dissipation de l'énergie vibratoire par hystérésis fait généralement intervenir un module complexe d'élasticité dont le rôle restrictif ne semble pas toujours avoir été bien compris; une utilisation inconsiderée de ce module peut conduire à des erreurs importantes comme on peut le voir par des développements mathématiques assez élémentaires.

La linéarité complète de l'équation du second ordre du mouvement d'un oscillateur soumis à une force extérieure  $P \cos(\omega t)$ , variant sinusoidalement avec le temps, ne s'obtient que sous la forme :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P \cos(\omega t) \quad (1)$$

où  $m$ ,  $c$  et  $k$  représentent l'inertie, le coefficient d'amortissement et le module de raideur.

La solution de régime :

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (2)$$

comporte une amplitude relative  $a/a_0$ , (où  $a_0 = P/k$ ), dont l'expression est :

$$a/a_0 = [(1 - \rho^2)^2 + 4\zeta^2\rho^2]^{-1/2} \quad (3)$$

et un retard de phase donné par :

$$\tan \varphi = 2\zeta\rho/(1 - \rho^2) \quad (4)$$

Dans ces expressions  $\rho = \omega/\omega_0$  (où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ), et  $\zeta = c/2m\omega_0$ .  
L'énergie  $E$  dissipée par cycle est, avec  $T = 2\pi/\omega$  :

$$E = \int_0^T P \cos \omega t \cdot \dot{x} dt = \int_0^T c \dot{x}^2 dt \quad (5)$$

d'où :

$$E = \pi P a \sin(\varphi) = \pi c a^2 \omega. \quad (6)$$

Cette dissipation est ici proportionnelle à la fréquence et au carré de l'amplitude.

Or, des expériences déjà anciennes conduites par Kimball et Lovell[1] ont montré que pour de nombreux matériaux, cette dissipation cyclique est bien proportionnelle au carré de l'amplitude, mais pratiquement *indépendante* de la fréquence, et ceci pour une très large bande de fréquences. On peut donc parler d'une dissipation par hystérésis. C'est en effet ce que l'on retrouverait en admettant que l'aire entourée par la courbe tracée dans le diagramme tension déformation est indépendante du temps mis à parcourir le cycle.

Des expériences plus modernes (Lazan [2]) confirment ces résultats en restreignant quelque peu le domaine des fréquences et des amplitudes.

## 2. LE MODÈLE CLASSIQUE, LINÉAIRE MAIS APPROXIMATIF

En invoquant la petitesse de l'effet, l'habitude s'est installée de parler de coefficient d'amortissement inversement proportionnel à la fréquence imposée :

$$c = h/\omega \quad (6)$$

de manière à conserver une solution pratiquement sinusoïdale qui donne à la fréquence considérée, une dissipation cyclique indépendante de  $\omega$  :

$$E = \pi h a^2 \quad (7)$$

Comme la constante  $h$  a les mêmes dimensions que  $k$ , il est d'usage d'introduire un paramètre  $\eta$  sans dimension, en posant :  $h = \eta k$ . On a alors :

$$\zeta = h/2m\omega_0\omega = \eta\omega_0/2\omega = \eta/2\rho$$

ce qui donne le modèle « approché » :

$$m\ddot{x} + (h/\omega)\dot{x} + kx = P \cos(\omega t) \quad (8)$$

et, au lieu de (3) et de (4) :

$$a/a_0 = [(1 - \rho^2)^2 + \eta^2]^{-1/2} \quad (9)$$

$$\tan \varphi = \eta/(1 - \rho^2) \quad (10)$$

Il est clair que la forme (8) de l'équation n'est pas satisfaisante et qu'il convient de reconsidérer le problème sous l'angle de la transformée de Fourier si l'on conserve l'hypothèse de la linéarité.

En admettant alors que le degré de l'équation du mouvement puisse être supérieur à deux (système à plusieurs degrés de liberté), ce sont les dérivées d'ordres impairs qui contribueront à former la partie imaginaire  $k\eta$  du module complexe  $k^* = k(i + j\eta)$ . Celle-ci doit être une fonction impaire de  $\omega$ , prenant donc ici dans le cas actuel, la forme  $k\eta\omega/|\omega|$ .

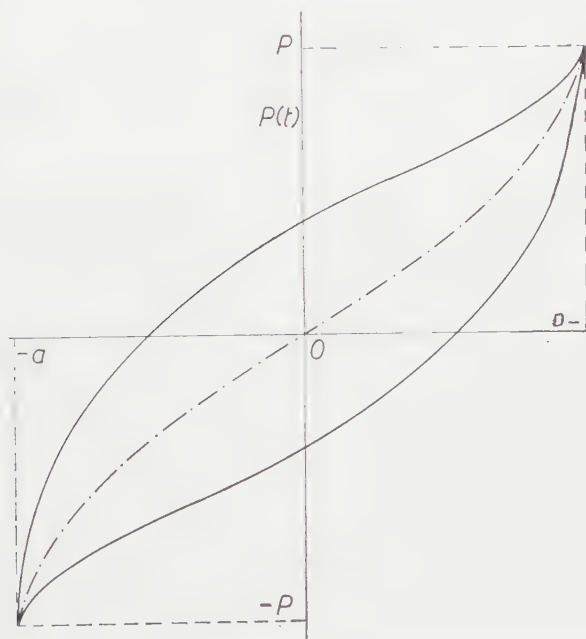


Fig. 1

On peut alors montrer (Fraeys de Veubeke [3]) que l'on aboutit à une absurdité physique en régime transitoire du fait que l'effort interne dépendrait aussi bien de l'histoire future que de l'histoire passée du mouvement.

On peut échapper à cette impasse en supposant que la condition sur l'indépendance de l'amortissement cyclique vis-à-vis de la fréquence ne vaut que dans une bande plus ou moins large; Biot [5] donne une

solution approchée valable dans un domaine ne contenant pas le voisinage de  $\omega = 0$ .

Nous cherchons ici une solution qui maintienne intégralement le caractère d'indépendance de la dissipation cyclique vis-à-vis de toutes les fréquences, en laissant donc tomber nécessairement la condition de linéarité de l'équation.

Nous admettons que cette dissipation ne dépend que de l'amplitude  $a$  de l'oscillation, que nous supposons d'abord complètement symétrique. Il n'est pas nécessaire de spécifier dès le début la forme de cette fonction  $F(a)$ . Remarquons d'ailleurs que certains résultats expérimentaux indiqueraient, pour les poutres composites, une dissipation proportionnelle au cube de l'amplitude de déformation [5], et d'autre part, on sait que dans des phénomènes d'hystérésis magnétiques, (fig. 1), Steinmetz adopte une perte par cycle indépendante de  $\omega$  et proportionnelle à  $a^{1,8}$ .

### 3. DÉTERMINATION D'UN MODÈLE EXACT, A DISSIPATION STRUCTURALE, SANS MÉMOIRE

Reprenons donc le problème de plus haut et, en admettant que la dissipation cyclique soit indépendante de la fréquence et donc seulement fonction de l'amplitude des oscillations entretenues par une force extérieure  $P \cos \omega t$ , demandons-nous quelle doit être l'expression de la force interne suscitée par le mouvement, sans chercher à séparer dès l'abord la partie conservative de la partie dissipative. En désignant cette force par  $-c(x, \dot{x})$ , nous avons l'équation :

$$m\ddot{x} + c(x, \dot{x}) = P \cos \omega t \quad (11)$$

et la condition :

$$E = \int_0^T P \cos \omega t \cdot \dot{x} dt = \int_0^T c(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} dt = F(a) \quad (12)$$

avec  $F_\omega(a) = 0$ , pour toute amplitude  $a$  et toute pulsation imposée  $\omega$ .

En effet, au lieu de  $P$  et  $\omega$ , nous prendrons  $a$  et  $\omega$  comme paramètres indépendants,  $a$  étant une fonction de  $P$  et de  $\omega$ , ainsi que des coefficients de raideur, amortissement et inertie du système. Ces derniers coefficients sont pris fixes et dès lors, nous pouvons écrire :

$$x(t) = a \cdot \xi(\tau, \rho, \alpha) \quad (13)$$

où  $\tau = t/T$ ,  $\rho = \omega/\omega_0$  et  $\alpha = a/a_0$  sont des paramètres sans dimensions. Le choix des temps et longueurs caractéristiques  $2\pi/\omega_0$  et  $a_0$  (éventuels)

pourra se faire en prenant par exemple :

$$\omega_0^2 = \varphi'_x(0,0)/m, \text{ ou } [\varphi'_x(0,0)/\varphi'_x(0,0)]^2, \text{ ou } \varphi''_{x^2}(0,0)/\varphi''_{\dot{x}^2}(0,0), \text{ etc.} \quad (14)$$

$$a_0 = \varphi''_{x^2}(0,0)/\varphi'_x(0,0) \text{ ou } \varphi''_{x\dot{x}}(0,0)/\varphi'_x(0,0), \text{ etc.}$$

le choix entre ces différentes expressions étant indifférent pourvu qu'il soit significatif (différent de 0 et de  $\infty$ ).

Dès lors, les expressions (11) et (12) peuvent s'écrire (en posant  $\partial\dot{\xi}/\partial\tau = \ddot{\xi}$ ) :

$$(\rho/2\pi)^2 a \ddot{\xi} + \varphi(a\dot{\xi}, a\dot{\xi}\omega/2\pi)/k + a\dot{\xi} = (P/k) \cos(2\pi\tau) \quad (15)$$

$$E/a = P \int_0^1 \cos(2\pi\tau) \ddot{\xi} d\tau = \int_0^1 \varphi(a\dot{\xi}, a\dot{\xi}\omega/2\pi) \ddot{\xi} d\tau = F'(a)/a \quad (16)$$

L'équation (15) montre que d'une manière générale  $\xi$  dépend bien de  $\rho$ . D'autre part, d'un point de vue purement dimensionnel, nous devons avoir, en dérivant par rapport à  $\omega$  :

$$\int_0^1 \varphi'_x(a\dot{\xi}, a\dot{\xi}\omega/2\pi) \ddot{\xi}^2 d\tau = 0 \quad (17)$$

En fait, l'intégrale comprenant  $\varphi'_x$  ne devrait être étendue à l'intervalle (0,1) qu'en exceptant les points où  $\dot{\xi} = 0$ , pour lesquels cette dérivée pourrait ne pas exister; la présence du facteur  $\ddot{\xi}^2$  permet en fait d'introduire des fonctions généralisées de la forme  $\delta(\dot{\xi})$ ,  $\delta'(\dot{\xi})$ , ... (fonction de Dirac et dérivées) dans l'expression de  $\varphi'_x$ , sans changer l'intégrale complète (17).

Une nouvelle dérivation de (17) par rapport à  $\omega$  donne :

$$\int_0^1 \varphi'_{x^2} \ddot{\xi}^3 d\tau = 0 \quad (18)$$

etc., de sorte que l'on a nécessairement  $\varphi'_x = \varphi''_{x^2} = \dots = 0$  pour tout  $x$  et pour  $\dot{\xi} \neq 0$ , si  $\varphi(x, \dot{x})$ , et donc aussi  $\varphi'_x(x, \dot{x})$  appartient à la classe des fonctions généralisées au sens de Temple-Lighthill, [6], [7], (voir Annexe I).

On est ainsi conduit à écrire l'expression :

$$\varphi'_x(x, \dot{x}) = f_1(x, \dot{x}) \delta(\dot{x}) + f_2(x, \dot{x}) \delta'(\dot{x}) + \dots \quad (19)$$

La détermination des fonctions  $f_1(x, \dot{x})$ ,  $f_2(x, \dot{x})$ , ... ne peut résulter, dans notre cas, que de la condition (12), jointe aux conditions de symétrie postulées ici.

L'intégration de (19) opérée dans les deux sens de  $\dot{x}$  à partir de  $\dot{x} = 0$ , donne, en introduisant  $g(x)$  comme « constante » d'intégration

par rapport à  $\dot{x}$ , et en posant :

$$4h(x, \dot{x}) = [f_1(x, \dot{x}) - f'_{2x}(x, \dot{x})] \quad (20)$$

$$G(x) = g(x) + h(x, 0+) - h(x, 0-) \quad (21)$$

l'expression (v. Annexe 2) :

$$\begin{aligned} \varnothing(x, \dot{x}) = & [h(x, 0) + h(-x, 0)] \cdot \dot{x}/|\dot{x}| + [h(x, 0) - h(-x, 0)] \dot{x}/|\dot{x}| \\ & + [f_2(x, 0+) u(\dot{x}) - f_2(x, 0-) u(-\dot{x})] \delta(\dot{x}) + G(x) \end{aligned} \quad (22)$$

Il reste à vérifier la condition fondamentale (12). Par substitution il reste :

$$\int_0^T [h(x, 0) + h(-x, 0)] |\dot{x}| dt = 4 \int_0^a [h(x, 0) + h(-x, 0)] dx = F(a) \quad (23)$$

à satisfaire pour tout  $a > 0$ . On a donc :

$$h(a, 0) + h(-a, 0) = F'(a)/4 \quad (24)$$

pour tout  $a > 0$ , et donc :

$$4[h(x, 0) + h(-x, 0)] =$$

$$f'_1(x, 0) + f'_1(-x, 0) - f'_{2x}(x, 0) - f'_{2x}(-x, 0) = F'(|x|) \quad (25)$$

Comme nous avons supposé, dans ce qui précède, que le système est entièrement symétrique en ce qui concerne ses oscillations positives et négatives, nous ne pouvons garder ici que les termes qui échangent de signe lorsqu'on change simultanément les signes de  $x$  et de  $\dot{x}$ .

Ceci élimine le second terme de (22), qui contient une fonction symétrique en  $x$ ; le troisième terme ne peut être conservé que si  $f_2(x, 0+) = f_2(-x, 0-) = f(x)$ , pour tout  $x$ . Enfin, la fonction  $G(x)$  devra elle-même être impaire  $g(x) = -g(-x)$ .

Le modèle mathématique cherché pour le système symétrique à dissipation structurale, sans termes de mémoire, est donc représenté par l'équation :

$$m\ddot{x} + F'(|x|) \dot{x}/|\dot{x}| + [f(x) u(\dot{x}) - f(x) u(-\dot{x})] \delta(\dot{x}) + g(x) = P \cos \omega t \quad (26)$$

dans laquelle la force de rappel  $g(x)$  est impaire.

#### 4. TERMES DISSIPATIFS ET CONSERVATIFS. EXTENSION AUX SYSTÈMES DISSYMMÉTRIQUES

On voit qu'au second membre de (22) seul le premier terme (25) donne une dissipation cyclique; on peut le considérer comme le terme caractéristique de dissipation structurale.

Le second terme fait apparaître dans le crochet une fonction im-



paire en  $x$ ; ce terme correspondrait à une résistance tantôt positive, tantôt négative à dissipation totale nulle; en fait, sur chacun des intervalles  $x > 0$  et  $x < 0$  on a :

$$\left( \int_0^{+a} + \int_{+a}^0 \right) [h(x,0) - h(-x,0)] |dx| = H(a) = -H(-a) \quad (27)$$

Du point de vue physique, il suffirait que :

$$h(x,0) - h(-x,0) \leq F'(|x|)/4 \quad (28)$$

pour que la résistance provenant des deux premiers termes ensemble ne devienne jamais négative. Or, d'après (20) et (25), ou encore d'après (k), Annexe 1, cette condition se ramène à :

$$h(x,0) \geq 0 \quad (29)$$

pour tout  $x$ , positif ou négatif, soit, d'après (28) :

$$f_1(x,0) - f'_{2x}(x,0) \geq 0 \quad (30)$$

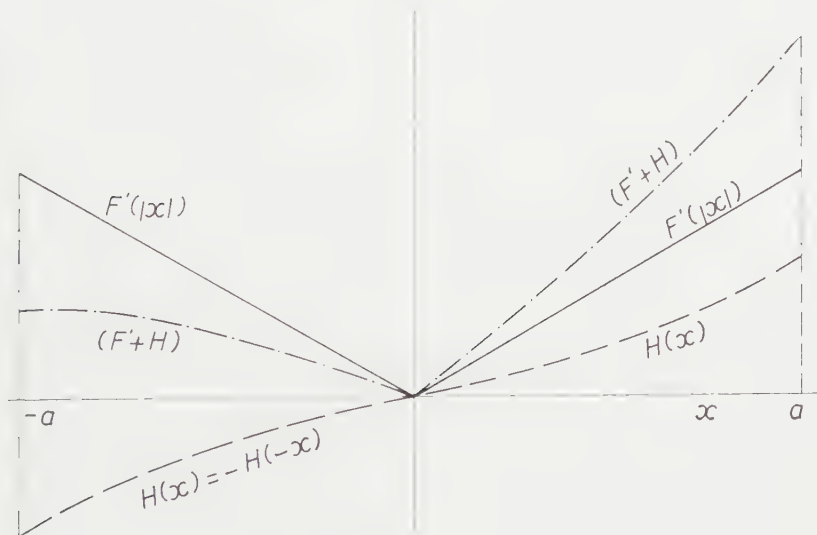


Fig. 2

La figure (2) donne les courbes de  $F'(|x|)$  et de  $H(x) = h(x,0) - h(-x,0)$  (qui a été supposée continue), ainsi que celles de leur somme.

Notons que si le second terme de (22) ne donne aucune dissipation cyclique, il ne peut être utilisé dans le modèle symétrique.

Le troisième terme représente une force d'un type assez curieux, nulle tant que l'oscillateur est en mouvement ( $\dot{x} \neq 0$ ), prenant une valeur instantanée, éventuellement très grande lorsque la vitesse s'annule ( $\dot{x} = 0$ ), et de plus, changeant de valeur d'après que la vitesse rejoint

ou quitte la valeur 0 par valeurs positives ou négatives, pour autant que  $f_2(x, 0+) \cdot f_2(x, 0-) > 0$ . Il s'agit donc d'une force de « frottement statique », dont la valeur pourrait dépendre non seulement de l'écart  $x = \pm a$ , mais encore du sens du mouvement  $\dot{x} = 0 \pm$ . Le coefficient de frottement statique ne serait symétrique que si  $f_2(x, 0+) = f_2(x, 0-)$ , soit pour le système symétrique (26) :  $f(x) = f(-x)$ , fonction paire.

Cette résistance au mouvement disparaît dès que  $\dot{x} \neq 0$ , ce qui explique qu'elle ne dissipe aucune énergie, tout en étant évidemment capable de modifier le mouvement.

Enfin, le dernier terme n'est pas dissipatif si  $G(x)$  est une fonction univoque de  $x$ .

On peut songer à étendre les résultats précédents aux systèmes dissymétriques, en mettant par exemple la condition (12) sous la forme :

$$E = F(a') + F(a'') + \frac{1}{2} [S(a') + S(-a') - S(a'') - S(-a'')] \quad (31)$$

où  $a'$  et  $-a''$  désignent les amplitudes positive et négative.

En définitive, si nous laissons de côté des forces de nature assez particulière n'intervenant qu'à l'arrêt ( $\dot{x} = 0$ ), telle celle représentée par le troisième terme de (22), le modèle mathématique d'un système oscillant sans mémoire, à dissipation cyclique caractérisée par (31), répondrait à l'équation :

$$m\ddot{x} + \left[ F'(|x|) + \frac{S'(x) - S'(-x)}{2} \right] \dot{x}/2|\dot{x}| + G(x) = P \cos \omega t \quad (32)$$

dans laquelle  $G$  peut être dissymétrique.

Si l'on admet que la seule force responsable de la dissipation cyclique est « fragmentairement » linéaire, c'est-à-dire qu'elle est linéaire dans les intervalles ( $x > 0, \dot{x} > 0$ ), ( $x > 0, \dot{x} < 0$ ), ( $x < 0, \dot{x} < 0$ ) et ( $x < 0, \dot{x} > 0$ ), une solution pourra s'obtenir par raccordement de solutions élémentaires construites dans chacun de ces intervalles si les troisième et quatrième termes présentent le même caractère de linéarité fragmentaire, c'est-à-dire que dans l'équation :

on a :

$$m\ddot{x} + [K'u(x) + K''u(-x)] \dot{x}/|\dot{x}| + H(x) \dot{x}/|\dot{x}| + G(x) = P \cos \omega t$$

$$H(x) = H_0 x/|x| + H_1 x$$

$$G(x) = G_0 x/|x| + G_1 x$$

et alors :

$$E = K'a'^2 + K''a''^2 + H_1(a' - a'') \quad (33)$$

Les solutions partielles sont sinusoïdales avec chacune deux constantes arbitraires à fixer par les conditions de raccordement (en  $x$  et  $\dot{x}$ ) entre les quatre intervalles précédents ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$x_i = c_{0i} + [P/m(\omega^2 - \omega_i^2)] \cos \omega t + A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t) \quad (34)$$



avec  $c_{01} = -(G_0 + H_0)/(G_1 + H_1 + K')$  ,  $m\omega_1^2 = G_1 + H_1 + K'$

$c_{02} = -(G_0 - H_0)/(G_1 - H_1 - K')$  ,  $m\omega_2^2 = G_1 - H_1 - K'$

$c_{03} = -(G_0 - H_0)/(G_1 + H_1 - K'')$  ,  $m\omega_3^2 = G_1 + H_1 - K''$

$c_{04} = -(G_0 + H_0)/(G_1 - H_1 + K'')$  ,  $m\omega_4^2 = G_1 - H_1 + K''$

(35)

## 5. OSCILLATIONS LIBRES D'UN OSCILLATEUR SYMÉTRIQUE

L'étude de l'amortissement de l'oscillation naturelle à partir de conditions données ( $x_0, \dot{x}_0$ ) se fait très simplement à partir du schéma précédent, en posant  $P = 0$ .

Limitons-nous ici au cas du modèle sous sa forme la plus dépouillée, en posant  $G_0 = H_0 = H_1 = 0$ ,  $G_1 = k$  et  $K' = K'' = \beta k$ .

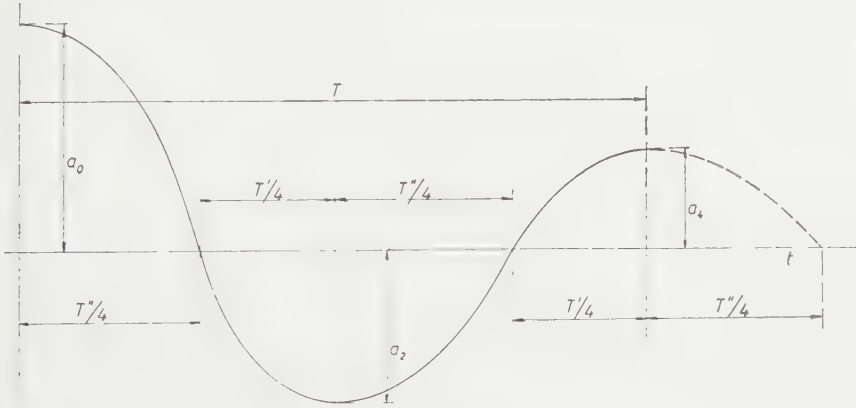


Fig. 3

L'énergie dissipée par cycle serait ici; d'après (33) :

$$E = F(a) = 2\beta ka^2$$

L'équation est donc alors :

$$m\ddot{x} + k(x + \beta\dot{x}|x/\dot{x}|) = 0 \quad (36)$$

Nous avons donc  $c_{04} = 0$ , et :

$$\omega_1^2 = \omega_4^2 = \omega'^2 = k(1 + \beta)/m = \omega_0^2(1 + \beta) , \quad T' = 2\pi/\omega' \quad (37)$$

$$\omega_2^2 = \omega_3^2 = \omega''^2 = k(1 - \beta)/m = \omega_0^2(1 - \beta) , \quad T'' = 2\pi/\omega'' \quad (38)$$

Partons de  $t_0 = 0$ , avec l'amplitude  $A_1 = a_1$ ; on a successivement, pour les intervalles :

$$0 < t < t_1 = T''/4$$

$$t_1 = T''/4 < t < t_2 = (T'' + T')/4$$

$$t_2 = (T'' + T')/4 < t < t_3 = (2T'' + T')/4$$

$$t_3 = (2T'' + T')/4 < t < t_4 = (T'' + T')/2$$

les solutions respectives :

$$x(t) = a_0 \cos \omega'' t$$

$$x(t) = -(a_0 \omega''/\omega') \sin \omega' (t - t_1)$$

$$x(t) = -(a_0 \omega''/\omega') \cos \omega'' (t - t_2) \quad (39)$$

$$x(t) = (a_0 \omega''^2/\omega'^2) \sin \omega' (t - t_3)$$

pour lesquelles :

$$\dot{x}(t_1) = -a_0 \omega''$$

$$x(t_2) = -a_0 \omega''/\omega' = -a_2$$

$$\dot{x}(t_3) = a_0 \omega''^2/\omega' = a_2 \omega''$$

$$x(t_4) = a_0 \omega''^2/\omega'^2 = a_2 \omega''/\omega' = a_4$$

La figure 3 représente cette oscillation amortie, composée de tronçons de quarts d'ondes sinusoïdales, le coefficient de décroissance des amplitudes au bout d'une pseudo-période  $T = (T' + T'')/2$  vaut donc  $\omega''^2/\omega'^2 = (1 - \beta)/(1 + \beta)$ , et la pseudo-période étant :

$$T = (\pi/\omega_0) [(1 + \beta)^{-1/2} + (1 - \beta)^{-1/2}] \quad (40)$$

la pseudo-pulsation d'amortissement vaut :

$$\omega_a = 2\pi/T = 2\omega_0/[(1 + \beta)^{-1/2} + (1 - \beta)^{-1/2}] \quad (41)$$

Si le coefficient d'amortissement  $\beta$  est petit (en tout cas  $< 1$ ), on peut employer le développement en série :

$$\omega_a = \omega_0 [1 - 3\beta^2/8 - 17\beta^4/128...] \quad (42)$$

La fig. 4 représente la même oscillation dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$  où la « trajectoire » s'obtient en raccordant des quarts d'ellipses.

Il est intéressant de comparer le résultat (41) avec celui que Collar<sup>[8]</sup> obtient en admettant la validité de l'équation linéaire (1), avec  $P = 0$  et en y substituant d'après (6)  $c = h/\omega_a = \eta k/\omega_a$ , où  $\omega_a$  est précisément la pseudo-pulsation à calculer. Il trouve ainsi :

$$(\omega_a) = \omega_0 \sqrt{(1 + \sqrt{1 - \eta})/2} \quad (43)$$

dont le développement est :

$$(\omega_a) = \omega_0 [1 - \eta^2/8 - 5\eta^4/128...] \quad (44)$$

La comparaison doit se baser sur l'égalité des dissipations cycliques (7) et (12), en régime périodique; on en déduit  $\pi h = 2\beta k$  d'où

$$\beta = \pi \eta / 2 \quad (45)$$

ce qui fournit l'expression exacte (43) :

$$\omega_a = \omega_0 [1 - 3(\pi/2)^2 \eta^2/8 - 17(\pi/2)^4 \eta^4/128 \dots] \quad (46)$$

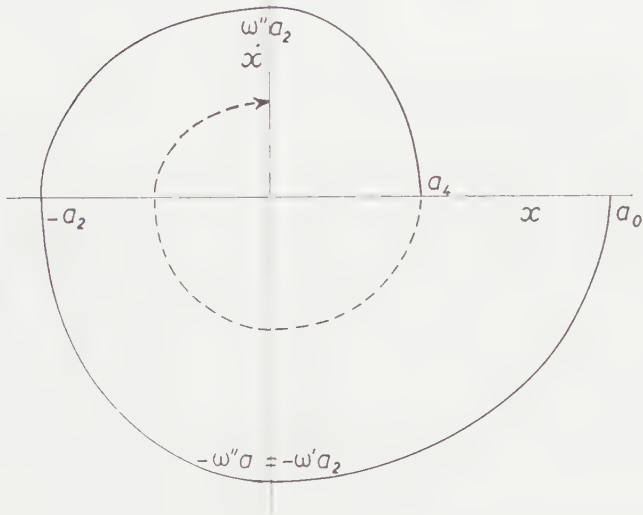


Fig. 4

et ceci donne pour la pseudo-pulsation  $\omega_a$  une décroissance avec le coefficient  $\eta$  beaucoup plus rapide que dans la formule de Collar.

D'ailleurs, la formule (42) donne  $\omega_a = 0$  pour  $\beta = \pi \eta / 2 = 1$  c'est-à-dire pour une valeur de  $\eta$  qui ne rend pas encore l'expression (44) imaginaire. Ceci s'explique si l'on note que d'après (38), on a dans ce cas  $\omega'' = 0$  de sorte que  $x(t) = a_0 = \text{constante}$  dans l'intervalle infini  $0 < t < t_1 = T''/4 = \infty$  : le système conserve l'écart  $x = a_0$  car la résistance au mouvement équilibre exactement la force de rappel,  $ka_0$ .

D'autre part, on note que si  $\beta < 1$ , mais proche de l'unité, le coefficient de décroissance  $(1 - \beta)/(1 + \beta)$  provoque une chute presque totale au bout d'une seconde période, d'ailleurs longue. Si  $\beta \ll 1$ , on vérifie que cette loi de décroissance donne, jusqu'au second ordre, le même résultat que celle fournie par la méthode approchée de Collar;

celle-ci donne un facteur de décroissance

$$e^{-cT/2m} = e^{-\pi\eta/\sqrt{(1+\sqrt{1-\eta})/2}} = 1 - \eta\pi/\sqrt{(1+\sqrt{1-\eta})/2} + \eta^2\pi^2/(1+\sqrt{1-\eta}) - \dots$$

alors que le coefficient exact vaut :

$$(1 - \beta)/(1 + \beta) = 1 - 2\beta + 2\beta^2 + \dots \quad (47)$$

La comparaison donne :

$$\beta = (\eta\pi/2)/\sqrt{(1+\sqrt{1-\eta})/2} = (\eta\pi/2)(1 + \eta^2/8 + \dots) \quad (48)$$

et donne une coïncidence jusqu'au second ordre avec l'expression (46), obtenue par l'équivalence des énergies dissipées dans des conditions différentes, en oscillation forcée périodique.

Notons cependant qu'en bonne logique, la méthode de Collar devrait faire intervenir dans le coefficient d'amortissement  $c = h\omega$  une pulsation  $\omega$  non pas égale à la pseudo-pulsation  $\omega_a$ , mais à celle pour laquelle le spectre des fréquences de l'oscillation amortie présente un pic marqué, à supposer qu'il existe.

Ce spectre est, pour l'oscillation  $u(t) e^{-\nu t} \cos \omega_a t$ ,

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_0^\infty e^{-(\nu + i\omega)t} \cos(\omega_a t) dt = \frac{\nu + i\omega}{\omega_a^2 + \nu^2 - \omega^2 + 2i\nu\omega}$$

d'où en module,

$$S(\omega) = |F(i\omega)| = \left[ \frac{\nu^2 + \omega^2}{(\omega_a^2 + \nu^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_a^2} \right]^{1/2} \quad (49)$$

La courbe de  $S(\omega)$  présente bien un pic assez effilé lorsque  $\zeta$  est suffisamment petit. Dans ce cas, on trouve  $dS/d\omega = 0$  pour  $\omega = 0$  et  $\omega = \omega_m$  où

$$\omega_m = \sqrt{\omega_a \sqrt{\omega_a^2 + 4\nu^2} - \nu^2} \quad (50)$$

Appliqué à notre cas, ce résultat fournit, avec  $\omega^2 = k/m$  :

$$\nu = c/2m = h/2m\omega_m = \eta\omega_0/2\omega_m \quad (51)$$

en même temps que :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2} \quad (52)$$

Il suffit d'éliminer  $\omega_m$  et  $v$  entre (50), (51) et (52) pour trouver  $\omega_a$  en fonction de  $\omega_0$  et de  $\eta$ . On trouve ainsi la relation :

$$\eta^2 \omega_0^4 = 4(\omega_0^2 - \omega_a^2) [\omega_a \sqrt{4\omega_0^2 - 3\omega_a^2} - (\omega_0^2 - \omega_a^2)] \quad (53)$$

ce qui, en posant  $\omega_a = \omega_0 (1 - c_1 \eta^2 - c_2 \eta^4 \dots)$  donne  $c_1 = 1/8$ ,  $c_2 = 1/32$  et donc une expression qui ne diverge de celle de Collar (44) qu'à partir du second ordre en  $\eta^2$ . On pouvait s'y attendre puisque  $\omega_m$  se confond avec  $\omega_a$  au premier ordre près.

## 6. SYSTÈMES A MÉMOIRE « COURTE »

Le système représenté par le modèle (26), repris sous sa forme essentielle :

$$m\ddot{x} + F'(|x|) \cdot \dot{x}/4|\dot{x}| + g(x) = P(t) \quad (54)$$

s'il a le mérite de la simplicité, a cependant le tort de ne pas donner un cycle d'hystérésis du type habituel (fig. 5a pour  $\omega \rightarrow 0$ ).

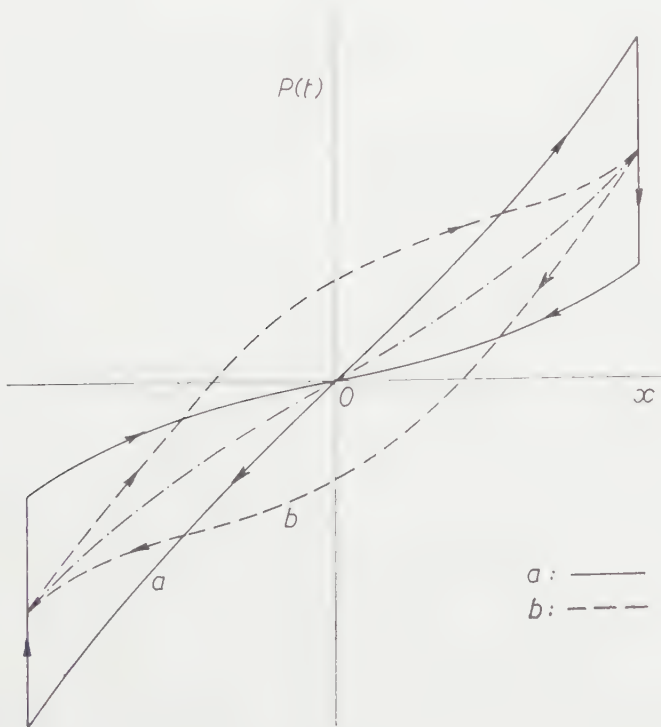


Fig. 5

On remarque qu'il suffirait d'inverser le rôle des sommets de la courbe avec celui de l'origine pour passer de la courbe  $a$  à la courbe  $b$  (fig. 5), cette dernière étant semblable à celle de la fig. 1.

Or ceci peut s'obtenir par l'introduction de ce que l'on pourrait appeler une mémoire courte, en ce sens que l'influence du terme non-linéaire de l'équation précédente se ferait sentir à partir du dernier extremum atteint par la variable  $x$ . Ceci demande évidemment un ajustement des autres termes et l'on obtient ainsi :

$$m(\ddot{x} - \ddot{x}_m) - F'(|x| - |x_m|) \frac{\dot{x}}{4|\dot{x}|} + g(x) - g(x_m) = P(t) - P(t_m) \quad (55)$$

étant entendu que  $x_m$  désigne le dernier extrémé atteint. En fait, ces extrémés s'obtiendront pour  $\dot{x} = 0$  et à ce moment la fonction généralisée  $\dot{x}/|\dot{x}|$  devient aussi nulle (moyenne entre les valeurs  $-1$  et  $+1$  à gauche et à droite). Contentons-nous ici de quelques indications élémentaires concernant le cas schématique d'une linéarité fragmentaire, pour lequel (55) devient, avec  $F(a) = 2k\beta a^2$

$$m(\ddot{x} - \ddot{x}_m) - k\beta(|x| - |x_m|) \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + k(x - x_m) = P(t) - P(t_m) \quad (56)$$

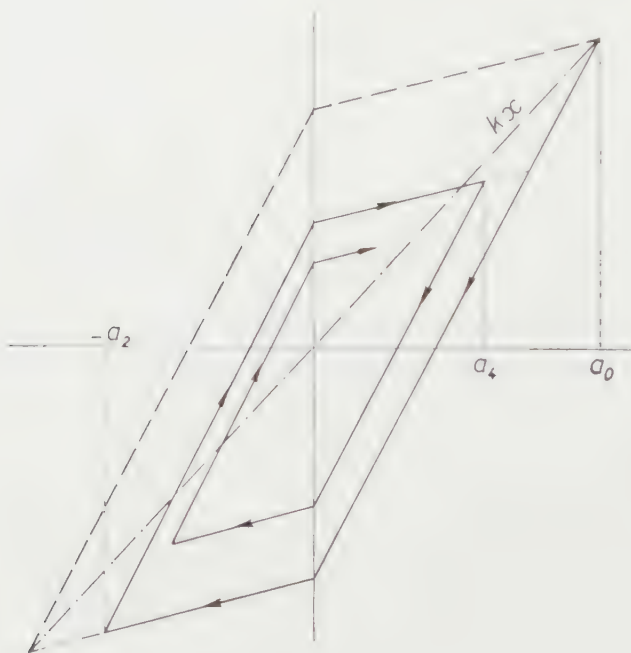


Fig. 6

Le problème des oscillations naturelles amorties doit être traité en posant  $P(t) = 0$ , soit alors  $a_0$  l'amplitude initiale, avec  $\dot{x}_0 = 0$ , et  $\ddot{x}_{m0} = 0$ . Les équations se présentent alors de la façon suivante (fig. 6) : pour  $0 < t < t_2$ , avec  $\dot{x} < 0$  et  $\dot{x}(t_2) = 0$ ,

$$m\ddot{x} + k\beta(|x| - a_0) + k(x - a_0) = -P(0) = -ka_0 \quad (57)$$

d'où, en intégrant après multiplication par  $\dot{x}$  et en prenant  $x(t_1) = 0$  et  $x(t_2) = -a_2$  :

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1^2 - k(1 + \beta)a_0^2 &= -2k\beta a_0^2 \\ -m\dot{x}_1^2 + k(1 - \beta)a_2^2 &= -2k\beta a_0 a_2 \end{aligned} \quad (58)$$

d'où :

$$\dot{x}_1^2 = \omega_0^2 a_0^2 (1 - \beta) \quad (59)$$

et par addition :

$$a_2^2(1 - \beta) - a_0^2(1 + \beta) = -2\beta a_0(a_0 + a_2) \quad (60)$$

Ensuite, pour  $t_2 < t < t_4$ , avec  $\dot{x} > 0$  et  $\dot{x}(t_4) = 0$ , en notant que cette fois le second membre de (56) est nul, mais qu'au premier membre  $-m\ddot{x}_m = k\beta(a_2 - a_0) - ka_2$  d'après (57) :

$$m\ddot{x} - k\beta(|x| - a_2) + k(x + a_2) = k[a_2 + \beta(a_0 - a_2)] \quad (61)$$

d'où, avec  $x(t_3) = 0$  et  $x(t_4) = a_4$ , le bilan énergétique des intervalles correspondants :

$$\begin{aligned} m\dot{x}_3^2 - k(1 + \beta)a_2^2 &= 2k\beta(a_0 - 2a_2)a_2 \\ -m\dot{x}_3^2 + k(1 - \beta)a_4^2 &= 2k\beta(a_0 - 2a_2)a_4 \end{aligned} \quad (62)$$

On en déduit la valeur de  $\dot{x}_3^2$ , et par addition :

$$a_4^2(1 - \beta) - a_2^2(1 + \beta) = 2\beta(a_0 - 2a_2)(a_2 + a_4) \quad (63)$$

De (60) et (63) on déduit, lorsque  $\beta < 1$  :

$$\begin{aligned} a_2/a_0 &= 1 - \beta - \beta^2/2 \dots \\ a_4/a_2 &= 1 - \beta + 3\beta^2/2 \dots \end{aligned} \quad (64)$$

ce qui indique un taux de décroissance :

$$a_3/a_0 = 1 - 2\beta + 2\beta^2 \dots \quad (65)$$

comparable jusqu'au second ordre avec celui (47) observé dans le système sans mémoire « courte ».

## REMARQUE

Dans le cas de l'hystérésis magnétique, on peut songer à construire un modèle mathématique suivant les mêmes principes, mais en notant qu'ici le terme d'inertie fait défaut ( $m = 0$ ). Un modèle qui apparemment se rapproche des conditions observées expérimentalement (avec toutefois un écart sur la valeur des pertes cycliques données par Steinmetz), serait :

$$-h(|B|^{1+\varepsilon} - |B_m|^{1+\varepsilon}) \frac{B}{\dot{B}} + k_1(B - B_m) + k_3(B^3 - B_m^3) = H - H_m$$

H et B désignant respectivement le champ et l'induction; le rôle du terme  $\varepsilon > 0$  consisterait à effacer la discontinuité de pente qui, sans lui, apparaîtrait aux points  $B = 0$  du cycle.

Nous reviendrons sur ce cas ainsi que sur le problème plus général des oscillations entretenues, dans une analyse des résultats fournis par des systèmes analogiques.

## ANNEXES

1. On sait que du point de vue des mathématiques appliquées le maniement de certaines fonctions telles que celle de Dirac, utile dans l'analyse harmonique, a été grandement facilité par les travaux de Temple [6] et de Lighthill [7].

Rappelons que Lighthill considère des fonctions  $f(x)$  partout continues ainsi que toutes leurs dérivées, dont la limite pour  $|x|$  infini est au plus de l'ordre de  $x^N$ , d'une part, pour un N fini donné s'il s'agit de la classe des fonctions « passables » (fairly good), d'autre part pour N *quelconque* (même négatif) s'il s'agit de la sous-classe des « bonnes » (good) fonctions.

Les fonctions généralisées sont alors définies par une séquence infinie de bonnes fonctions  $f_n(x)$  telle que,  $F(x)$  étant une fonction passable *quelconque*, la séquence  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n F dx$  converge uniformément vers une limite finie.

Les indices ne peuvent correspondre aux valeurs successives attribuées à un paramètre, et par exemple la fonction de Dirac  $\delta(x)$  est une fonction généralisée qui peut être définie par la condition que cette limite soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) F(x) dx = F(0) \quad (a)$$

pour toute fonction passable  $F(x)$ .



En fait, les fonctions généralisées définies de cette façon ne doivent jouer un rôle que sous des intégrales, où on peut leur appliquer les règles valables pour les fonctions continues, puisque tous les membres des séquences qui les définissent sont de « bonnes » fonctions.

C'est ainsi que la dérivée  $\delta'(x)$  de  $\delta(x)$  peut se définir par toute séquence donnant la limite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) F(x) dx = \delta(x) F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx = -F'(0) \quad (b)$$

On remarquera aussi que la somme ou le produit d'une fonction généralisée et d'une bonne fonction donnée, reste une fonction généralisée.

Dans notre cas, si l'on admet que  $\varphi^{(x, \dot{x})}(x, \dot{x})$  appartient à la classe des fonctions généralisées en  $\dot{x}$ , il est évident que les seules fonctions « singulières » qui doivent nous intéresser sont celles qui se manifestent en  $\dot{x} = 0$ , c.-à-d.  $\delta(\dot{x})$ ,  $\delta'(\dot{x})$ , etc., puisque la dissipation cyclique est indépendante de la fréquence  $\omega > 0$ , et doit apparaître déjà aux vitesses les plus faibles, pour n'importe quelle amplitude.

Il ne reste donc plus qu'à écrire  $\varphi_{\dot{x}}$  sous la forme :

$$\varphi'_{\dot{x}} = f_0(x, \dot{x}) + f_1(x, \dot{x}) \delta(\dot{x}) + f_2(x, \dot{x}) \delta'(\dot{x}) + f_3(x, \dot{x}) \delta''(\dot{x}) + \dots \quad (c)$$

où les  $f_0, f_1$  etc. sont de bonnes fonctions en  $\dot{x}$ .

Reprenons alors (17) et (18) sous la forme :

$$\int_0^{T/2} \varphi'_{\dot{x}} \dot{x}^2 dt = \int_0^{T/2} \varphi''_{\dot{x}^2} \dot{x}^3 dt = \dots = 0 \quad (d)$$

(ces intégrales restant nulles pour une demi-période à cause de la symétrie du système), nous voyons que la série de Taylor, applicable à  $f_0(x, \dot{x})$  :

$$f_0(x, 0 \pm) = f_0(x, \dot{x}) - \dot{x} f'_{0\dot{x}}(x, \dot{x}) + \frac{\dot{x}^2}{2} f''_{0\dot{x}^2}(x, \dot{x}) - \dots \quad (e)$$

multipliée par  $\dot{x}^2$  et intégrée de 0 à  $T/2$ , respectivement dans les intervalles où  $\dot{x} > 0$ , et  $\dot{x} < 0$ , en exceptant les points où  $\dot{x}$  s'annule, donne :

$$\int_0^{T/2} f_0(x, 0 \pm) \dot{x}^2 dt = 0 = \int_0^{1/2} f_0(a\xi, 0 \pm) \xi^2 d\tau$$

pour toute valeur de  $a$ , de sorte que  $f_0(x, 0 \pm) = 0$ .

De même on a :

$$f'_{0\dot{x}}(x, 0 \pm) = f'_{0\dot{x}}(x, \dot{x}) - \dot{x} f''_{0\dot{x}^2} + \frac{\dot{x}^2}{2} f'''_{0\dot{x}^3} - \dots$$

et donc :

$$\int_0^{T/2} f'_{0\dot{x}}(x, 0\pm) \dot{x}^3 dt = 0 = \int_0^{1/2} f'_{0\dot{x}}(a\check{\zeta}, 0\pm) \check{\xi}^3 d\tau$$

pour toute amplitude  $a$ , d'où :

$$f'_{0\dot{x}}(x, 0\pm) = 0$$

On trouve de même :

$$f''_{0\dot{x}^2}(x, 0+) = 0$$

et ainsi de suite, de sorte que la « bonne » fonction  $f_0(x, \dot{x})$  est nulle sur tout l'intervalle 0 à  $T/2$ .

Enfin, la première condition (d) montre que les fonctions généralisées  $\delta''(\dot{x})$ ,  $\delta'''(\dot{x})$ , etc. ne peuvent subsister dans  $\varphi'_x$  que multipliées par des fonctions de la forme  $\dot{x}F_3(x, \dot{x})$ ,  $\dot{x}^2F_4(x, \dot{x})$ , etc.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} f_3(x, \dot{x}) \delta''(\dot{x}) \dot{x}^2 dt &= \int_{\dot{x}_m}^{-\dot{x}_m} f_3(x, \dot{x}) \delta''(\dot{x}) (\dot{x}^2/\ddot{x}) d\dot{x} \\ &= f_3 \delta'(\dot{x}) (\dot{x}^2/\ddot{x}) \Big|_{\dot{x}_m}^{-\dot{x}_m} - \int_{\dot{x}_m}^{-\dot{x}_m} \delta'(\dot{x}) [f'_{3x} (\dot{x}^3/\ddot{x}^2) + f'_{3\dot{x}} (\dot{x}/\ddot{x}) + 2f_3(\dot{x}/\ddot{x}) \\ &\quad \dots - f_3 \cdot (\dot{x}^2 \ddot{x}/\ddot{x}^2)] d\dot{x} \\ &= \int_{\dot{x}_m}^{-\dot{x}_m} \delta(\dot{x}) (d/d\dot{x}) [f'_{3x} (\dot{x}^3/\ddot{x}^2) + f'_{3\dot{x}} (\dot{x}/\ddot{x}) + 2f_3(\dot{x}/\ddot{x}) - f_3(\dot{x}^2 \ddot{x}/\ddot{x}^2)] d\dot{x} \\ &= f'_{3\dot{x}}(a, 0) + 2f_3(a, 0)/\ddot{x}_a, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (f)$$

ce qui demande  $f_3(x, 0) = 0$  pour tout  $x$ , c.à.d.  $f_3(x, \dot{x}) = \dot{x}F_3(x, \dot{x})$  etc., sinon il apparaîtrait des dérivées supérieures  $\ddot{x}_a, \ddot{\ddot{x}}_a$ , etc. (dont la valeur dépend des forces extérieures et qui ne peuvent donc caractériser des paramètres intrinsèques du système, tels que les facteurs de dissipation).

Dans ces conditions l'intégration de  $\varphi'_x$  ne fait pas apparaître, par les termes  $\dot{x}F_3\delta'(\dot{x})$ ,  $\dot{x}^2F_4\delta''(\dot{x})$  etc. de contributions formellement nouvelles par rapport à celle fournie par les termes précédents,  $f_1\delta(\dot{x})$  et  $f_2\delta'(\dot{x})$ , termes auxquels nous pourrions donc limiter l'expression de  $\varphi'_x$ .

2. L'intégration de (21) se fait le plus commodément en partant de  $\dot{x} = 0$  et en superposant les intégrales valables respectivement pour

$\dot{x} > 0$  et pour  $\dot{x} < 0$ ; de toute façon, l'addition d'une fonction d'intégration  $g(x)$  encore arbitraire à ce stade justifie ce procédé, qui, à notre point de vue, a l'avantage d'être symétrique par rapport à  $\dot{x}$ . On a, en remarquant que  $\delta x / \delta \dot{x} = \dot{x} / \ddot{x}$  :

$$\begin{aligned} \varnothing(x, \dot{x}) &= \left[ u(\dot{x}) \int_{0+}^{\dot{x}>0} -u(-\dot{x}) \int_{0-}^{\dot{x}<0} \right] [f_1(x, \dot{x}) \delta(\dot{x}) + f_2(x, \dot{x}) \delta'(\dot{x})] d\dot{x} + g(x) \\ &= u(\dot{x}) [f_1(x, 0+) / 2 + (f_2(x, \dot{x}) \delta(\dot{x}))] \Big|_{0+}^{\dot{x}>0} - \int_{0+}^{\dot{x}>0} \delta(\dot{x}) [f'_{2x}(\dot{x} / \ddot{x}) + f_{2\dot{x}}] d\dot{x} \\ &\quad - u(-\dot{x}) [f_1(x, 0-) / 2 + (f_2(x, \dot{x}) \delta(\dot{x}))] \Big|_{0-}^{\dot{x}<0} - \int_{-0}^{\dot{x}<0} \delta(\dot{x}) [f'_{2x}(\dot{x} / \ddot{x}) + f_{2\dot{x}}] d\dot{x} \\ &\quad + g(x). \end{aligned} \tag{g}$$

où la fonction échelon-unité  $u(x)$  est définie par

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx$$

donc nulle pour  $x < 0$ , égale à 1/2 pour  $x = 0$ , et à 1 pour  $x > 0$ .

On obtient ainsi, en supposant  $f'_{2x}(x, 0\pm) < \infty$  :

$$\begin{aligned} \varnothing(x, \dot{x}) &= u(\dot{x}) [(1/2)[f_1(x, 0+) - f_{2\dot{x}}(x, 0+)] - f_2(x, 0+) \delta(\dot{x}) \\ &\quad - u(-\dot{x}) [(1/2)[f_1(x, 0-) - f_{2\dot{x}}(x, 0-)] - f_2(x, 0-) \delta(\dot{x})] + g(x) \end{aligned} \tag{h}$$

Posons :

$$f_1(x, \dot{x}) - f_{2\dot{x}}(x, \dot{x}) = 4h(x, \dot{x}) \tag{i}$$

et notons que, avec :

$$2h(x, 0) = h(x, 0+) + h(x, 0-)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2h(x, 0+) &= [h(x, 0) + h(-x, 0)] + \\ &\quad [h(x, 0) - h(-x, 0)] + [h(x, 0+) - h(x, 0-)] \end{aligned} \tag{j}$$

et une formule analogue pour  $2h(x, 0-)$ .

On peut maintenant transcrire (h) sous la forme :

$$\begin{aligned} \varnothing(x, \dot{x}) &= 2h(x, 0)[u(\dot{x}) - u(-\dot{x})] + [h(x, 0+) - h(x, 0-)][u(\dot{x}) + u(-\dot{x})] \\ &\quad - [F(x, 0+) u(\dot{x}) - F(x, 0-) u(-\dot{x})] \delta(\dot{x}) + g(x) \end{aligned} \tag{k}$$

ce qui, compte tenu de (29) nous donne bien l'expression (22) puisque :

$$u(\dot{x}) - u(-\dot{x}) = \dot{x} / |\dot{x}|, \quad u(\dot{x}) + u(-\dot{x}) = 1.$$

## RÉFÉRENCES

- [1] KIMBALL A.I. and LOVELL D.E. Internal Friction in Solids. *Physical Review*, Vol. 30, Dec. 1927.
- [2] LAZAN B.J. A Study with New Equipment of the Effects of Fatigue Stress on Damping Capacity and Elasticity of Mild Steel. *Trans. Am. Soc. Metals*, Vol. 4, 1950.
- [3] FRAEYS DE VEUBEKE, B.M. Influence of Internal Damping on Aircraft Resonance, Agard Manual on Aero-elasticity. Part. I. Chap. 3., 1960.
- [4] BIOT A.M. Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids. *Proc., 3d U.S. Nat. Congress of Appl. Mech., ASME*, June 1958.
- [5] PIAN H.H and HALLOWELL F.C. Structural Damping in a Simple Built-Up Beam. *Proc. of first U.S. Nat. Congress of Appl. Mech.*, 1951.
- [6] TEMPLE G. Generalised Functions. *Proc. Roy. Soc. A*, 228, 1955.
- [7] LIGHTHILL M.J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. Cambridge Univ. Press. 1958.
- [8] BISHOP R.E.D. The Treatment of Damping Forces in Vibration Theory. *Jour. of Royal Aeron. Soc.*, Vol. 59, Nov. 1955.

Deuxième Section

SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Sur les aberrations périaxiales de l'œil. III

PAR

A. BIOT

SOMMAIRE

On calcule les aberrations géométriques de l'œil théorique en la fovéa pour les radiations C et F. Puis, en tenant compte de la courbure des rayons, celles qui correspondent, pour la fovéa, à la loi de variation des indices dans le cristallin  $n^2 = n_0^2 + (3.1319325)y^2$ ,  $n_0$  étant l'indice sur l'axe et  $y$  la distance à l'axe. On discute les résultats obtenus qui montrent en particulier que pour une valeur de la constante, dans la loi de variation de l'indice, égale à la moitié de celle qui est donnée ci-dessus on obtient une réduction au 1/10 des aberrations pour la raie D dans le plan focal, puis, pour C et F, une sensible superposition des «disques» de diffusion.

1. *Les aberrations géométriques de l'oeil théorique en la fovéa pour C et F.* Nous avons considéré les mêmes rayons incidents parallèles que dans le travail I <sup>(1)</sup>. Ils font un angle commun de  $5^{\circ} 00' 34'' .3$  avec l'axe de l'œil et sont numérotés de 1 à 6.

Nous avons donné, dans le travail cité, les indices adoptés pour la radiation F. Les indices pour C ont été calculés de la même manière que ceux pour F. Voici les valeurs adoptées

cornée	1.37501
hum. aq.	1.33553
crist.	1.41741
vitré	1.33414

Le tableau (1) ci-dessous renferme les valeurs des hauteurs  $h_i$  d'intersection dans le plan focal pour C, D, F, les valeurs pour D et F étant reprises du travail I pour la comparaison. Nous avons indiqué aussi les hauteurs  $h_{co}$  d'intersection sur la cornée.

Le rayon 3, calculé avec les indices relatifs à la raie D, passe par le centre de l'iris. Calculé avec les indices relatifs à C et F il n'en est

<sup>(1)</sup> *Ann. Soc. Scient. Brux.*, 74, 175, 1960.

plus de même. Toutefois les hauteurs  $h_i$  relatives à des rayons qui passent, pour C et F, par le centre de l'iris coïncident pratiquement avec les valeurs données ci-dessous.

$$h = 0$$

rayon	$h_{co}$	$h_i$		
		C	D	F
1	+ 1,75	1,4018*	1,3897	1,3586
2	+ 0,80	1,4517	1,4517	1,4278
3	- 0,2657	1,4625	1,4609	1,4568
4	- 0,6815	1,4627*	1,4629	1,4634
5	- 2,00	1,4885	1,4949	1,5108
6	- 2,26	1,4995	1,5069	1,5267

Remarquons encore que les valeurs  $h_{ic}$  marquées d'un astérisque n'ont pas été obtenues directement. Ayant en effet obtenu les autres nous avons remarqué que pour celles-ci le rapport  $|h_{ic} - h_{iD}|/|h_{iF} - h_{iD}|$  est égal à 0,395. nous avons admis qu'il en est de même pour les rayons 1 et 4. D'où les valeurs inscrites au tableau.

2. *Calcul de  $h_i$  avec un cristallin à indice variable (C et F).* Nous avons vu que, parmi les relations essayées, seule la formule  $n^2 = n_0^2 + by^2$  fournit des résultats encourageants. Faut-il, pour C et F, adopter des valeurs de  $b$  différentes de celle que l'on a choisie pour D? Nous n'en avons rien fait. Une variation (légère) de  $b$  introduirait une variation de  $n$  qui serait en effet du second ordre puisque l'introduction de  $b$  ne produit déjà qu'une faible variation de l'indice. Nous avons en conséquence fait nos calculs en prenant  $b = \{3,1319325\} = b_1$ .

On trouve alors, pour la raie F, les relations suivantes pour les rayons courbes dans le cristallin

rayon

$$3 \quad x + 38,21389 = \{1,9493946\} \text{Log}_{10}(y + \sqrt{y^2 + 7,223877})$$

$$4 \quad x - 49,71136 = -\{1,9489237\} \text{Log}_{10}(y + \sqrt{y^2 + 10,46031})$$

$$5 \quad x - 72,72190 = -\{1,9470175\} \text{Log}_{10}(y + \sqrt{y^2 + 23,48938})$$

$$6 \quad x - 75,11225 = -\{1,9466835\} \text{Log}_{10}(y + \sqrt{y^2 + 25,76092})$$

$$(n^2 = 2,0341605 + \{3,1319325\} y^2)$$

Si, pour ces rayons ( $b = b_1$ ) on calcule les valeurs  $h_{iF}$  on constate que le rapport de  $|h_{iF} - h_{iD}|$  en rayons courbes dans le cristallin à  $|h_{iF} - h_{iD}|$  en rayons rectilignes dans le cristallin est le même pour tous les rayons et vaut 1,030. En appliquant cette règle aux rayons 1 et 2 courbes dans le cristallin on peut facilement calculer les  $h_i$  correspondants à l'aide des nombres du tableau (1). Si l'on opère de la sorte il convient de déterminer le rapport pour des rayons de n° élevé; ce sont ceux pour lesquels les angles qui interviennent, et par suite la précision, sont les plus grands.

Pour la radiation C nous n'avons déterminé que les équations, dans le cristallin, des rayons 5 et 6. On trouve

$$5 \quad x - 71,97972 = - \{ 1,9443589 \} \operatorname{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 22,94058})$$

$$6 \quad x - 74,33810 = - \{ 1,9440376 \} \operatorname{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 25,09929})$$

$$(n^2 = 2,009051 + \{ 3.1319325 \} y^2)$$

Nous avons remarqué en effet que pour ces deux rayons le rapport  $| \bar{h}_{iD} - h_{iC} | / | h_{iF} - h_{iD} |$  vaut aussi 0.395. D'où les valeurs  $h_{iC}$  ( $b = b_1$ ) pour les rayons (c) 1, 2, 3 et 4.

Le calcul direct des  $h_i$  pour  $b = b_1$  est plus précis que le calcul direct de ces mêmes quantités pour  $b = b_2 = b_1/2$  car les petits nombres qui interviennent sont plus grands dans le premier cas que dans le second. C'est pour cela que nous avons effectué les calculs précédents pour  $b = b_1$ .

Nous savons pourtant que la dispersion des valeurs de  $h_i$  est plus petite pour  $b = b_2$  que pour  $b = b_1$  ( $n = n_D$ ). Nous avons donc ramené les valeurs  $h_i$  trouvées ci-dessus pour  $b = b_1$  aux valeurs correspondant à  $b = b_2$  par une remarque faite antérieurement et avons établi de la sorte le tableau (2) ci-dessous

Valeurs de  $h_i$  pour  $b = b_2$

rayon	C	Diff.	D	Diff.	F	$\omega_n D$
1	1,4377*	0,0129	1,4248	0,0312	1,3936	+ 1° 10' 03'' .6
2	1,4762*	0,0068	1,4694	0,0170	1,4520	- 1° 22' 51'' .3
3	1,4661*	0,0017	1,4644	0,0041	1,4603	- 4° 05' 04'' .9
4	1,4572*	-0,0003	1,4575	-0,0006	1,4581	+ 5° 07' 45'' .6
5	1,4564	-0,0066	1,4626	-0,0164	1,4795	+ 8° 33' 44'' .3
6	1,4647	-0,0077	1,4724	-0,0202	1,4925	+ 9° 04' 29'' .9



La dernière colonne renferme, pour la radiation  $D$ , la valeur de l'angle que font, dans le vitré, les différents rayons avec l'axe optique. Le signe plus devant  $\omega_n$  indique que le rayon converge vers l'axe après sa sortie du cristallin; le signe - qu'il s'en écarte.

4. *Discussion des valeurs de  $h_i$  pour  $b = b_2$ .* On reportera avec avantage les valeurs de  $h_i$  sur des verticales C, D, F, à une échelle convenable et à partir d'une horizontale commune. D'un côté de ces droites on placera les valeurs pour  $b = 0$ , de l'autre les valeurs pour  $b = b_2$ .

a) On remarque ainsi facilement que les points relatifs à  $b = b_2$  sont bien plus serrés (mieux groupés) que pour  $b = 0$ , le rayon 1 montrant cependant chaque fois une notable sous-correction. Si l'on ne tient pas compte de ce rayon on constate que pour D la dispersion des  $b_i$  est environ 10 fois plus petite que pour  $b = 0$ . Il y a un gain notable pour C et pour F également.

b) Il est permis de se demander pourquoi l'augmentation de l'indice avec la distance à l'axe dans le cristallin diminue l'aberration alors qu'à première vue celle-ci devrait être augmentée en raison d'une possible augmentation de puissance marginale. La diminution de l'aberration provient de la courbure du rayon. Celui-ci possède en effet, puisque  $b$  est  $> 0$ , une courbure tournée vers les  $y$  croissants ( $y$  est  $> 0$  vers le haut dans la moitié supérieure du cristallin et vers le bas dans sa moitié inférieure). De la sorte, la tangente au rayon lumineux courbe au point de sortie du cristallin est moins inclinée sur l'axe que celle de l'entrée. Elle coupe l'axe optique plus loin que ne le ferait un rayon resté rectiligne (indice constant). Et cela correspond à une « correction ».

c) Si l'on néglige toujours l'effet très partiel du rayon 1 et, éventuellement celui du rayon 6 on constate que les disques de diffusion correspondant à C et à F sont sensiblement coaxiaux et renferment la plupart des rayons de l'ouverture. Cela est nécessaire pour que ne soient pas perçus l'effet des aberrations chromatiques longitudinale et latérale qui ne sont pas perçues dans la vision normale dans laquelle est « neutralisée » la lumière colorée « débordante ».

d) On peut rechercher s'il existe un rayon incident qui, quel que soit l'indice, rencontre le plan focal à la même distance de l'axe. On voit de suite qu'il en existe pratiquement un, compris entre les rayons 3 et 4, plus voisin de ce dernier que de l'autre. La hauteur d'intersection peut se déterminer à l'aide des résultats du tableau (2). Elle correspond à des différences nulles entre  $h_{iC}$ ,  $h_{iD}$  et  $h_{iF}$ . On trouve ainsi, par la méthode graphique (II, § 5, a) que pour la valeur  $h_{co} = -0,6228$  la valeur commune de  $h_i = 1,4584$ . Cette valeur ne correspond avec le centre de gravité d'aucun des « disques » de diffusion C, D ou F. On remarquera qu'elle est assez différente de celle qui correspond au rayon central.

e) On remarquera sur la figure proposée que le diamètre du disque de diffusion change peu quand on passe de D à C ( $\alpha = 656,3$  mm). Nos conclusions relatives aux  $h_{iD}$  sont donc valables près de D vers C, c'est-à-dire dans l'orangé. On sait que l'on admet que l'œil met au point sur une image orangée. Il est d'ailleurs possible, en vertu d'une remarque faite plus haut (§ 2) de trouver toutes les valeurs  $h_i$  correspondant à une longueur d'onde comprise dans l'intervalle  $\lambda_c, \lambda_F$  ou un peu en dehors de cet intervalle à l'aide du calcul direct d'un seul rayon lumineux — après que l'on a bien entendu déterminé à l'aide d'une formule d'interpolation convenable la valeur des indices de réfraction pour la longueur d'onde choisie.

On peut opérer graphiquement à partir du résultat obtenu par le calcul direct qui permet de déterminer le rapport  $|h_{iF} - h_{i\lambda}| / |h_{iD} - h_{iF}|$ . Pour cela on établit à une échelle convenable (p. ex. 1  $\mu$  en  $h_i = 1$  mm sur les échelles) le schéma de verticales dont il est question au § 4, la distance de ces verticales pour D et F étant par exemple de 100 mm. On garnit ces deux verticales des valeurs  $h_i$  du tableau (2) et on réunit par des droites les points qui correspondent au même rayon. On mène alors une nouvelle verticale à une distance de la droite I donnée par le rapport trouvé ci-dessus. Les intersections de la nouvelle verticale avec les autres droites donne les valeurs des  $h_{i\lambda}$ .

5. *Conclusions générales.* a) Si l'on suppose que l'indice, dans le cristallin, varie avec la distance à l'axe il est nécessaire de tenir compte, pour calculer les aberrations, de la courbure concomitante des rayons.

b) La loi de variation  $n^2 = n^2 + by^2$  dans laquelle  $b$  est voisin de  $\{4.8309025\}$  réduit à 1,10 de sa valeur le diamètre du disque de diffusion calculé dans les mêmes conditions pour l'œil théorique normal.

c) Effectués avec la même valeur de  $b$ , les calculs pour les radiations C et F donnent dans le plan focal de l'œil théorique modifié des disques de diffusion sensiblement centrés.

d) La meilleure valeur de  $b$  correspond à une variation faible de l'indice au bord de la partie optique du cristallin. On conclut à une grande sensibilité des observations aux défauts locaux du cristallin.

e) La valeur d'une « correction » géométrique des aberrations ne peut se déterminer que si l'on utilise les résultats obtenus pour calculer le chemin optique aberrant au « point » image. C'est ce que nous nous proposons de faire dans un prochain travail.

## Sur les aberrations périaxiales de l'œil. IV

PAR

A. BIOT

### SOMMAIRE

En se basant sur des résultats précédemment obtenus on calcule les différentes aberrations géométriques de l'œil théorique de Y. Le Grand au point d'intersection avec le plan focal du rayon principal du faisceau qui forme l'image et on en déduit les chemins optiques aberrants correspondants. Supposant ensuite que l'indice dans le cristallin varie suivant la relation

$$n_2 = 1,42^2 + \{4,8309025\} y^2$$

dans laquelle  $y$  est la distance à l'axe on calcule l'aberration sphérique longitudinale et la coma ainsi que les chemins optiques aberrants correspondants qui sont bien plus petits que dans le premier cas.

1. *Oeil théorique normal. L'aberration sphérique.* a) Le calcul donne pour des rayons incidents parallèles à l'axe optique et distants de cet axe de 1,2 et 2 mm les résultats suivants

$$b = 0$$

$h$ corn. mm	$h$ crist.	ab. sph. $\Delta x'$ mm	$\omega_n$ en deg.	$\omega_n$ en rad.
1,2	1,06099	- 0,1955	3° 07' 08''	
2	1,76868	- 0,5554	5° 18' 22''	{ 2,99660 }

$\omega_n$  ou, plus loin,  $\omega$  est l'angle d'intersection avec l'axe du rayon dans le vitré.

b) L'angle  $\omega$  restant petit et le système optique normal, on obtiendra une représentation suffisante de l'aberration sphérique longitudinale  $\Delta x'$  en posant

$$\Delta x' = a\omega^2, \quad (2)$$

la constante  $a$  étant déterminée par les valeurs de  $\Delta x'$  et de  $\omega$  au bord. On trouve

$$a = - \{1,81141\}$$

Dans les mêmes conditions le chemin optique aberrant  $n\Delta$ ,  $n$  étant l'indice du vitré égal à 1,336, vaut

$$n\Delta = -n\alpha\epsilon'^4/4$$

soit

$$n\Delta = +1,336 \times \{1,81141\} \times \{5,98640\}/4 = +\{3,32156\}$$

Exprimons cette longueur en longueurs d'onde  $\lambda_D = 589,3 \text{ m}\mu = \{4,77034\} \text{ mm}$ . On a

$$n\Delta = \alpha\lambda$$

avec  $\alpha = +3,56$ .

Dans le plan de meilleure mise au point, situé à  $\Delta x'M/2$  c'est-à-dire à 0,278 mm en avant du foyer, l'aberration est réduite au 1/4 de la valeur absolue de celle que nous venons d'indiquer. On a alors une aberration zonale telle que

$$\alpha = -0,89$$

$n\Delta$  étant nul au bord.

On est loin de la condition de Rayleigh qui s'imprime par

$$|\alpha| \leq 0,25$$

c) On peut, avec la même approximation que précédemment, calculer l'aberration  $\Delta x'$  en fonction de la hauteur d'intersection sur l'iris ou, ce qui revient au même, sur le cristallin. On écrira alors

$$\Delta x' = a'h^2$$

La valeur de  $a'$  se détermine à l'aide des résultats précédents par

$$-0,5554 = a' \times 1,76868^2$$

On trouve

$$a' = -\{1,24931\}.$$

D'où

$$\Delta x' = -\{1,24931\} h^2 \quad (3)$$

Cette relation permet de calculer l'aberration sphérique longitudinale pour des rayons qui coupent le cristallin en des points dont la distance à l'axe est la même que pour les rayons 1 à 6 des calculs précédents. Ces distances sont reprises dans la ligne 1 du tableau (4). Les aberrations  $\Delta x'$  correspondantes se trouvent sur la ligne 2 du même tableau. L'inclinaison  $\omega$  de ces rayons avec l'axe optique peut se tirer, avec une approximation suffisante des nombres de la colonne 7 du tableau (2) du travail III qui précède. Ces inclinaisons sont sur la ligne 3 du tableau ci-dessous. En multipliant une valeur quelconque de  $\Delta x'$  par la tangente de l'angle  $\omega$  correspondant on obtient la valeur de l'aberration transversale (ligne 4). Cette aberration, convenablement combinée avec les  $h_i$  donne les valeurs  $h_i$  (ligne 5) corrigées de l'aber-

ration sphérique et dues seulement à l'astigmatisme, la courbure de champ et la coma. Toutes les longueurs sont exprimées en mm.

2. *Oeil théorique normal. Astigmatisme et courbure de champ en la fovéa.* a) Les aberrations se limitant au 3<sup>e</sup> ordre, il est intéressant de calculer la courbure de Petzval de l'œil théorique. La formule à appliquer est

$$\frac{1}{R_p} = -n_n \sum \frac{n'}{nm'r}$$

dans laquelle  $n_n$  est l'indice de réfraction du vitré,  $r$  le rayon d'une des surfaces de l'œil,  $n$  et  $n'$  les indices correspondants. On trouve

$$R_p = -17,232 \text{ mm}$$

Un calcul facile montre qu'à la hauteur de la fovéa cette surface se trouve à  $-0,0610$  mm (en arrière) du plan focal.

b) Astigmatisme. Le calcul exact donne pour les distances  $\Delta s$  et  $\Delta t$  qui séparent, sur le rayon central, le plan focal des focales sagittales et tangentielles les valeurs

$$\Delta s = -0,0784 \text{ et } \Delta t = -0,1074$$

L'astigmatisme vaut donc

$$\Delta s - \Delta t = 0,290 \text{ mm}$$

valeur en accord avec celle qui a été donnée dans le travail I et avec celle de la distance du plan focal à la surface de Petzval sur le même rayon central.

c) Au degré d'approximation que nous considérons les rayons incidents parallèles 1 à 6 étudiés plus haut et situés dans un plan méridien devraient se couper sur la focale tangentielle si l'aberration sphérique n'existait pas. Or celle-ci a été corrigée dans les résultats de la dernière ligne du tableau (4). Nous pouvons corriger ceux-ci de l'effet de l'astigmatisme et de la courbure de champ comme nous l'avons fait pour l'aberration sphérique. Ces aberrations introduisent en effet une aberration transversale, dans le plan focal, égale à  $\Delta t \times \text{tg} \omega$ , l'angle  $\omega$  étant, pour chaque hauteur d'intersection sur l'iris, égal à la valeur que l'on trouve dans la ligne 3 du tableau (4). Les valeurs  $h'_i$ , corrigées de  $\Delta t \times \text{tg} \omega$ , donnent des valeurs  $h''_i$  que l'on trouve dans la ligne 3 du tableau (5) et qui correspondent au seul effet de la coma.

d) Le chemin optique aberrant dû à l'astigmatisme et évalué au point de percée du rayon central avec le plan focal vaut (1)

$$n\Delta = -\frac{n\omega^2 h_i^2}{4} (C - A \cos 2\varphi)$$

(1) A. MARÉCHAL. Imagerie géométrique et aberrations. Editions *Revue d'Optique*, Paris, 1952.

Tableau 4 ( $b = 0$ )

rayon	1	2	3	4	5	6
$h_{cr}$	1,77359	0,94068	0	-0,36849	-1,54568	-1,71277
$\Delta x'$	$-\{1,74461\}$	$-\{1,19619\}$	0	$\{2,38217\}$	$\{1,62755\}$	$-\{1,71671\}$
$\omega$	$5^{\circ} 21' 05''$	$2^{\circ} 46' 02''$	0	$1^{\circ} 04' 19''$	$4^{\circ} 35' 59''$	$5^{\circ} 06' 17''$
aber. tr.	0,0520	0,0076	0	0,0005	0,0340	0,0465
$h_i$	1,3897	1,4450	1,4609	1,4629	1,4949	1,5063
$h'_i$	1,4417	1,4526	1,4609	1,4624	1,4609	1,4604

Tableau 5 ( $b = 0$ )

rayon	1	2	3	4	5	6
$h'_i$	1,4417	1,4526	1,4609	1,4624	1,4609	1,4604
ast.	+0,100	+0,0052	—	-0,0020	-0,0086	-0,0096
$h''_i$	1,4517	1,4578	1,4609	1,4604	1,4523	1,4508



avec, ici,  $n = 1,336$  et

$$C = (\Delta t + \Delta s)/h_i^2 \quad A = (\Delta s - \Delta t)/h_i^2$$

c'est-à-dire

$$n\Delta = -\frac{n\omega^2}{4} [(\Delta t + \Delta s) - (\Delta s - \Delta t) \cos 2\varphi]$$

ou

$$n\Delta = +1,336 \{3,93776\} [0,1858 + 0,0290 \cos 2\varphi]$$

L'angle  $\varphi$  est compté dans l'ouverture du système optique.

Son maximum correspond au maximum de  $n\Delta$  qui est donc

$$n\Delta = 1,336 \times \{3,93776\} \times 0,2148/4 = \{4,78354\}$$

c'est-à-dire

$$n\Delta = +1,03 \lambda_D$$

3. *Oeil théorique normal. Coma.* L'effet géométrique de la coma est représenté par les valeurs de  $h_i$  du tableau (5). On voit facilement que la courbe ( $h'_i$ ,  $h''_i$ ) est symétrique par rapport à l'axe, ce qui correspond bien à un effet de coma pure. La valeur maximum de  $\delta h'_i$  (en valeur absolue par rapport au rayon central correspond à  $\delta h_i = -0,0095$  mm environ.

Par ailleurs on a, dans le plan méridien où  $\Delta$  est maximum, pour la coma pure

$$n\Delta = nbh_i \sin^3 \omega$$

et

$$\delta h''_i = 3bh_i \sin^2 \omega$$

D'où

$$n\Delta = n \delta h''_i \sin \omega^3$$

Il s'ensuit que le chemin optique aberrant dû à la seule coma vaut ici en prenant  $\omega = 5^\circ 20'$  comme pour l'astigmatisme

$$n\Delta = -1,336 \times 0,0095 \times \{2,96888\} = \{4,59529\}$$

ou encore

$$n\Delta = -0,67 \lambda_D$$

Remarquons encore que, pour les hauteurs de rayons parallèles à l'axe égales à 1,2 et 2, le calcul exact donne

$h_{co}$	$\Delta x'$	$h/\sin \omega - f$	$h/\sin \omega - f - \Delta x'$
1,2	-0,1955	-0,233	-0,0378
2,0	-0,5554	-0,6616	-0,1062

La dernière colonne de ce tableau indique l'effet de la coma qui augmente avec l'ouverture.



4. Si l'on assemble les chemins optiques aberrants au point d'intersection du rayon central avec le plan focal on trouve, pour le chemin optique aberrant total

$$(n\Delta) = \Sigma_n \Delta = (3,56 + 1,03 - 0,67) \lambda_D = 3,92 \lambda_D$$

Ce chemin correspond aux deux points du bord de l'iris situés dans le plan méridien.

Si l'on suppose que par un choix convenable de la mise au point on puisse réduire l'aberration totale au 1/4 de la valeur ci-dessus on a encore

$$(\Delta n) = + 0,98 \lambda_D$$

Cette valeur ne correspond pas aux observations qui donnent  $(n\Delta)_T \leq 0,25 \lambda_D$ . De plus, elle correspond à une sous-correction au point de vue géométrique alors que l'expérience indique une sur-correction au moins pour une partie de l'ouverture.

5. *Oeil théorique avec indice variable dans le cristallin. Aberration sphérique.* Nous avons calculé l'aberration sphérique pour les hauteurs d'intersection 1,2 et 2 sur la pupille d'entrée (ou sur la cornée), la valeur de  $b$  adoptée étant  $b_2 = \{4.8309025\}$ .

Les équations des rayons dans le cristallin sont

$$x - 66,11087 = - \{2,0987484\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 4,166855})$$

$$x - 94,39094 = - \{2,0981737\} \text{Log}_{10} (y + \sqrt{y^2 + 12,02382})$$

Les valeurs trouvées pour  $\Delta x'$  et les  $\omega_n$  de sortie sont

$L$	$\Delta x'$	$\omega_n$ en deg.	$\omega_n$ en rad.	(7)
1,2	+ 0,2663	3° 02' 40"	{2,72138}	
2,0	- 0,1702	5° 11' 48"	{2,95360}	

L'aberration est repliée en sens inverse du sens habituel de correction et elle s'annule dans l'ouverture considérée pour une certaine valeur de  $\omega$ . Dans la représentation de  $\Delta x'$  en fonction de  $\omega$  il faut faire intervenir un terme d'ordre supérieur. En se servant du tableau (7) on trouve

$$\Delta x' = \{2,19705\} \omega^2 - \{4,34497\} \omega^4 \quad (8)$$

$\Delta x'$  passe par 0 pour  $\omega = \{2,92604\}$  qui correspond à une hauteur d'intersection sur le cristallin  $h_{cr} = 1,6595$  et une hauteur d'intersection sur la pupille d'entrée (ou encore sur la cornée)  $h_{co} = 1,8765$ . Le premier nombre s'obtient en exprimant  $\Delta x'$  en fonction de la hauteur d'intersection sur l'iris (ou le cristallin) ce qui conduit à

$$\Delta x' = \{1,60220\} h_{cr}^2 - \{1,16244\} h_{cr}^4$$

On trouve le second nombre en multipliant le premier par le facteur  $1/0,8844 = h_{co}/h_{cr}$  qui est sensiblement constant pour toute l'ouverture de la pupille.

Nous supposons, dans ce qui va suivre, que l'on restreint l'ouverture de la pupille à  $\varnothing = 2 \times 1,8765 = 3,753$  mm.

L'œil est alors corrigé géométriquement au bord où le chemin optique aberrant maximum vaut alors, au foyer

$$n\Delta = na'\omega^6 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = na'\omega^6/12$$

$a'$  étant égal à  $\{4,34497\}$ . On obtient

$$\begin{aligned} n\Delta &= -1,336 \times \{4,34497\} \{7,55624\} \{2,92052\} \\ &= -\{4,95785\} = -1,54 \lambda_D \end{aligned}$$

On sait toutefois<sup>(2)</sup> que dans le cas où une aberration sphérique géométrique de la forme (8) est corrigée au bord il existe un point sur l'axe où le chemin optique aberrant ne vaut — avec un signe opposé — que le  $1/16$  environ du chemin optique aberrant que l'on trouve au bord de la pupille ( $\omega_M$ ) avec le terme de degré supérieur. Il vient ici dans ce cas

$$n\Delta = \frac{na'}{16} \frac{\omega^6}{6} = -\{4,04532\} = -0,19\lambda_D$$

Remarquons encore qu'en raison du mode de correction il y a surcorrection géométrique dans toute l'étendue de la pupille.

6. *Oeil théorique avec cristallin à indice variable. Coma.* Observons d'abord qu'en raison de l'intervention des aberrations du 5<sup>e</sup> ordre et peut être d'autres aberrations du 3<sup>e</sup> ordre que les aberrations classiques, il est impossible d'opérer ici la dissection des aberrations géométriques que nous avons opérée pour l'œil théorique normal. Il faut aborder le problème autrement.

Le calcul exact donne les résultats ci-dessous

$h_{co}$	$\Delta x'$	$h/\sin\omega - f$	$h/\sin\omega - f - \Delta x$	$\sin\omega$
1,2	+ 0,2663	+ 0,3045	+ 0,0382	$\{2,72520\}$
2,0	- 0,1702	- 0,2077	- 0,0375	$\{2,95701\}$

(9)

En tenant compte de l'aberration d'ordre supérieur, on peut écrire

$$h/\sin\omega - f = f(b \sin^2\omega + b' \sin^4\omega)$$

ou

$$h/\sin\omega - f = f(b\omega^2 + b'\omega^4) = f\phi(\omega)$$

<sup>(2)</sup> A.E. CONRADY. Applied optics and optical design, II., Dover, New-York.

(Les coefficients  $b$  et  $b'$  ne sont évidemment pas ceux dont nous nous sommes servi plus haut). On trouve

$$b = \{0,90887\} \quad b' = -\{3.05946\}$$

D'où

$$f\phi(\omega) = \{0.90887\}\omega^2 - \{3.05946\}\omega^4 \quad (10)$$

Cette expression est égale à zéro pour  $\omega = \{2.9247\}$ , c'est-à-dire pour une valeur très voisine de celle qui fait  $\Delta x' = 0$ .

De ce résultat et des nombres de la colonne 4 du tableau (9) on peut déduire que la courbe qui représente la coma reste très voisine de celle qui représente l'aberration sphérique. La coma, ici reste bien plus faible que dans le cas de l'œil théorique normal.

On pourrait d'ailleurs étudier la valeur du chemin optique aberrant en se servant des relations (8) et (10) introduites dans la formule

$$n\Delta \text{ coma} = nh_i \sin \omega [f\phi(\omega) - \Delta x']/f$$

Nous n'avons pas estimé utile de le faire (§7).

7. *Oeil théorique avec cristallin à indice variable. Les autres aberrations.* Nous savons que nous devons tenir compte des aberrations du 5e ordre. On n'a pas, que nous sachions, développé la théorie de ces aberrations pour les milieux à indice variable. Mais nous pouvons supposer que les 9 aberrations classiques du 5e ordre existent ici aussi. Il est dans ces conditions pratiquement impossible d'aller plus loin que nous l'avons fait.

On peut toutefois raisonnablement espérer que les améliorations constatées sur l'aberration sphérique et la coma s'introduisent finalement dans l'imagerie.

8. *Conclusions.* a) Nous avons montré que les aberrations de l'œil théorique normal sont, pour la radiation D, plus grande et d'une autre nature que celles qui sont observées sur l'œil réel.

b) Si l'on suppose que l'indice, dans le cristallin, varie suivant la loi

$$x^2 = 1,42^2 + \{4,8309025\}y^2$$

on obtient pour l'aberration sphérique et la coma des valeurs compatibles avec celles qui sont observées et de même nature que celles-ci.

c) Il est remarquable qu'une très faible variation de l'indice rende compte des observations.

## Principe d'une méthode d'alignement

PAR

A. BIOT

### SOMMAIRE

On décrit une nouvelle méthode d'alignement qui utilise deux lunettes et un miroir plan.

1. *Le problème.* Etant donnés deux points A et B qui peuvent être distants de 50 m et plus et un point quelconque C compris entre A et B, il s'agit de placer, avec une précision donnée, le point C sur la droite AB.

2. *La méthode.* On dispose en A et B respectivement deux lunettes opposées, pointées l'une vers l'autre. Ces lunettes sont munies d'un réticule formé par exemple d'une croix de traits doubles. Immédiatement devant chaque lunette est placé un repère qui coïncide avec le point nodal extérieur de l'objectif correspondant. Cette dernière condition peut être réalisée mécaniquement. Ces repères sont amenés à coïncider avec les points A et B.

On dispose, par ailleurs, d'une lame à faces bien planes et bien parallèles rendues toutes deux réfléchissantes. Nous appellerons cette lame le « miroir ».

Pointons la lunette A sur le point B. Plaçons le miroir sensiblement au milieu de AB, ses faces étant à peu près perpendiculaires à AB. La lunette A observe maintenant par réflexion dans le miroir et, par réglage *du miroir*, peut être amenée à viser le repère A. Le miroir est alors perpendiculaire à AB. Réglons maintenant la lunette B par autocollimation sur le miroir : sa ligne de visée est parallèle à AB. Les deux lunettes sont réglées et leur réglage ne devra plus être modifié.

Soit maintenant un point C quelconque situé entre A et B. Il s'agit de le placer sur la droite AB. Mettons le miroir entre C et B, sensiblement au milieu de l'intervalle CB. A l'aide de la lunette B disposons-le perpendiculairement à AB. Pointons le repère placé en C à l'aide de la lunette A et déplaçons le repère jusqu'à ce que son image se fasse sur le réticule de la lunette A : le point C se trouve alors sur AB.

Le point C une fois en place, opérons avec les autres points D, etc., à régler, comme avec C.

3. *Exemple.* Supposons  $AB = 50$  m. Prenons deux lunettes identiques dont l'objectif a un diamètre de 40 mm et dont la longueur focale vaut 400 mm. La précision de pointé d'une telle lunette — en air homogène — est d'environ  $1/10$  de sa résolution c'est-à-dire  $(3/10)'' = 0,3''$ . A 50 m cet angle correspond à  $0,3 \times 50.000/200.000$  mm = 0,075 mm.

4. *Remarques a)* Les deux lunettes étant supposées identiques on peut, après avoir opéré comme il est dit plus haut avec les lunettes A et B, recommencer l'opération pour tous les points C, D, etc., en pointant la lunette B sur le point A et en réglant la lunette A par autocollimation sur le miroir.

b) Le non-parallélisme des faces du miroir peut introduire une erreur de pointé. Pour éviter cette erreur on doit faire attention à conserver à l'arête de l'angle des deux faces la même direction dans le plan perpendiculaire à AB lors des déplacements du miroir. On peut aussi faire sur la lame-miroir une surface bien plane qui sera le miroir et corriger l'autre face de manière à réaliser une lame à faces « optiquement parallèles ». L'erreur de pointage à craindre sera plus petite mais il sera toujours utile de prendre la précaution indiquée ci-dessus.

c) Les caractéristiques optiques des lunettes à utiliser dépendent, dans une certaine mesure, de la distance AB. Toutefois, dans un genre d'applications donné, les distances AB peuvent en général être considérées comme étant du même ordre.

d) Dans tout cas particulier d'application la précision du pointage en un point quelconque de AB est la même qu'en B.

## Modèles Statistiques dans l'étude de la réaction

$$\text{Al}^{27} (d, \alpha) \text{Mg}^{25}$$

PAR

G. DEMORTIER (\*), J.C. JODOGNE et P.C. MACQ  
Centre de Physique Nucléaire — Université de Louvain — Belgique

**SOMMAIRE** On détermine les paramètres statistiques dans l'étude de la réaction

$$\text{Al}^{27} (d, \alpha) \text{Mg}^{25}$$

Dans les notations de T. Ericson (1), on trouve

$$T = 1.7 \text{ Mev} \quad \tau = 2 \text{ Mev} \quad t = 1.8 \text{ Mev} \quad a = 5.3 \text{ Mev}^{-1}$$

**INTRODUCTION.** La physique des états excités du noyau connaît plusieurs voies d'approche. Depuis ces dernières années, la méthode statistique connaît un regain d'intérêt (1) grâce au développement de la spectroscopie tant des neutrons que des particules chargées: on a étudié les niveaux des noyaux par excitation et désexcitation jusqu'à 10 Mev au-dessus du niveau fondamental. Partant de la notion d'ensembles nucléaires excités en équilibre (le noyau composé), on se propose d'en étudier les modes de désexcitation avec un minimum d'hypothèses sur les composantes individuelles de cet ensemble (les nucléons).

Dans cette optique, nous avons étudié la désexcitation par particules  $\alpha$  du  $\text{Si}^{29}$  excité par capture de deutérons dans  $\text{Al}^{27}$ . Nous évitons ainsi toute perturbation due à des effets de couches.

**MÉTHODE EXPÉRIMENTALE.** Le faisceau analysé de 11.85 Mev du cyclotron du Centre de Physique Nucléaire de Louvain est focalisé

(\*) Boursier I.I.S.N.

(1) T. ERICSON — *Advances in Physics* — 36 - 425 - 1960.



sur une cible de 270 $\mu$ gr d'Al (fig. 1). Les spectres d'énergie des particules  $\alpha$  résultantes est analysé au moyen d'un détecteur, semi-conducteur de type p-n RCA Victor. Celui-ci est protégé des ions et électrons émis par la source par l'adjonction d'un champ magnétique placé entre la cible et le détecteur. Les signaux après amplification attaquent un analyseur RIDL à 400 canaux (fig. 2).

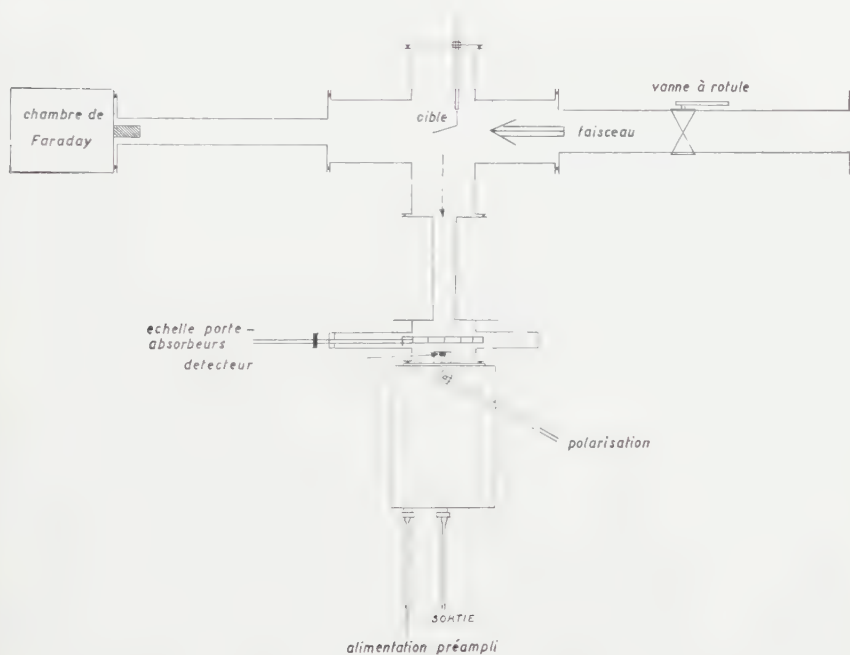
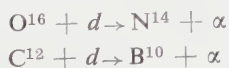


Fig. 1 — Géométrie de l'expérience

Les fentes d'entrée de l'aimant analyseur du faisceau incident avaient 1,5 cm d'ouverture afin de rendre optimum la résolution du spectre  $\alpha$ . Celle-ci était limitée à environ 1 % pour une énergie  $E_\alpha$  de 5 Mev. On a testé la linéarité du détecteur et calibré l'échelle d'énergie au moyen d'émetteurs  $\alpha$ , Po  $^{210}$  et Pb  $^{212}$ , ainsi que par les réactions



La limite inférieure du spectre utile est déterminée par le bruit de protons et deutérons; elle correspond au canal 105 de la figure 3 donnant le spectre  $\alpha$  relevé.



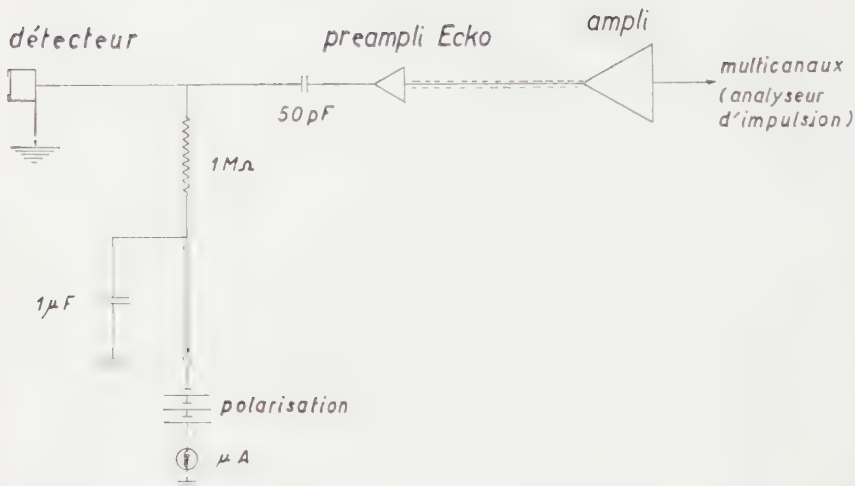


Fig. 2 — Schéma de l'électronique

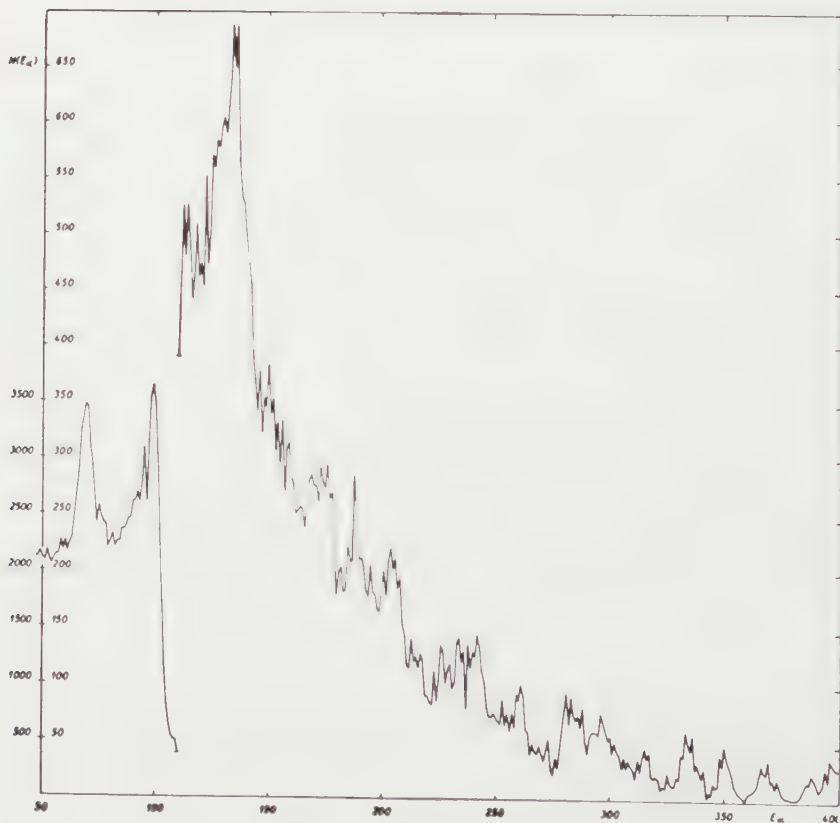


Fig. 3 — Spectre 1 de la réaction  $\text{Al}^{27}(d, \alpha)\text{Mg}^{25}$

L'abscisse de cette figure est désignée par le numéro d'ordre des canaux. La correspondance en énergie est la suivante

$$\text{canal 200} \rightarrow E_{\alpha} = 7.230 \text{ Mev}$$

$$\frac{E_{\alpha}}{\text{canal}} = 33,05 \text{ kev}$$

ANALYSE DES RÉSULTATS. La capture par  $\text{Al}^{27}$  de deutérons d'une dizaine de Mev produit un noyau  $\text{Si}^{29}$  excité à environ 29 Mev. La contribution d'interaction directe est très faible dans ce cas (2); cela peut s'expliquer par la hauteur de la barrière coulombienne (6.2 Mev pour  $r_o = 1.5$  Fermi (3)) : à part les premiers niveaux du  $\text{Mg}^{25}$  où l'interaction directe est importante, il n'y a aucune inhibition coulombienne qui pourrait favoriser anormalement ce processus par rapport à la désexcitation d'un noyau composé.

Partant de l'hypothèse où protons et neutrons forment un gaz de fermions libres contenu dans le volume  $V$  d'un noyau et possédant une énergie élevée (de l'ordre de 30 Mev), on montre (1) que le spectre des particules émises est décrit par :

$$\begin{aligned} N(E_{\alpha}) dE_{\alpha} &\approx \sigma_c(E_{\alpha}) E_{\alpha} \rho(E) dE_{\alpha} \\ &\approx \sigma_c(E_{\alpha}) \frac{\exp \{2\sqrt{aE}\}}{E^2} dE_{\alpha} \end{aligned}$$

avec  $N(E_{\alpha})$  : le nombre de particules  $\alpha$  émises dans un intervalle  $dE_{\alpha}$  d'énergie autour de  $E_{\alpha}$ .

$\sigma_c(E_{\alpha})$  : la section efficace de formation du noyau composé à partir de particules  $\alpha$  (3).

$E_{\alpha}$  : énergie de la voie  $\alpha$ .

$E$  : l'énergie d'excitation du noyau résiduel.

$a$  : une constante proportionnelle à  $A$  de l'ordre de  $A/10$  (4).

$\rho(E)$  : densité de niveaux du noyau résiduel au voisinage de l'énergie  $E$ .

On a porté à la figure 4

$$\ln \frac{N(E_{\alpha}) E^2}{\sigma_c(E_{\alpha}) E_{\alpha}}$$

(2) N. CINDRO, M. CERINEO, A. STRZALKOWSKI — *Nucl. Phys.* 24 - 107 - 1961.

(3) BLATT et WEISSKOPF — *Theoretical Nuclear Physics* p. 352.

(4) R.C. ALBERT, J. ANDERSON, C. WONG; *P.R.* 120 - 2149 - 1960; T. ERICSON (Réf. 1).

en fonction de  $E^{1/2}$  ; on en tire pour  $a$  (\*) la valeur

$$a = 5.3 \text{ Mev}^{-1}$$

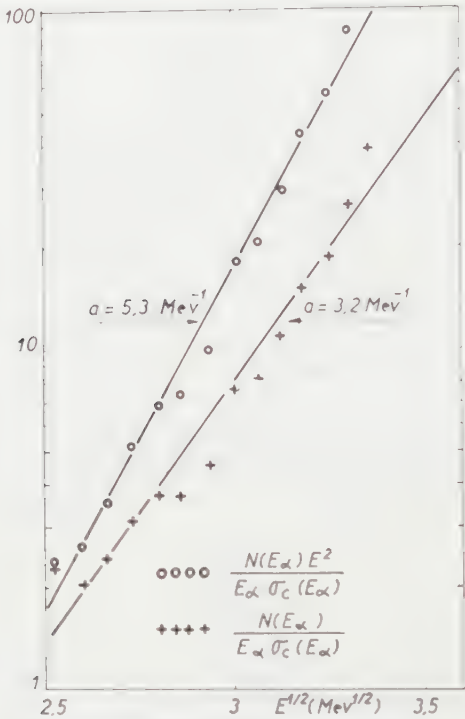


Fig. 4 — Détermination graphique de  $a$

Partant de l'approximation d'un ensemble en équilibre d'entropie  $S$ , on peut étudier le spectre comme dans le cas d'un phénomène d'évaporation résultant d'un apport d'énergie. On montre alors que

$$N(E_{\alpha}) dE_{\alpha} \approx \sigma_c(E_{\alpha}) E_{\alpha} \exp(-E_{\alpha}/T) dE_{\alpha}$$

où  $T$  est la température nucléaire du noyau résiduel définie par

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{dS}{dE_{\alpha}} \right)_{E_{\alpha} = E_{\alpha} \text{ max}}$$

(\*) Notons qu'on définit souvent la distribution par

$$N(E_{\alpha}) dE_{\alpha} \sim \sigma_c(E_{\alpha}) \exp\{2\sqrt{aE}\} dE_{\alpha}$$

A partir de cette définition on aurait (fig. 4).

$$a = 3.2 \text{ Mev}^{-1}$$

On a porté à la figure 5,

$$\ln \frac{N(E_\alpha)}{\sigma_c(E_\alpha) E_\alpha}$$

en fonction de  $E_\alpha$ ; on trouve

$$T = 1.7 \text{ Mev}$$

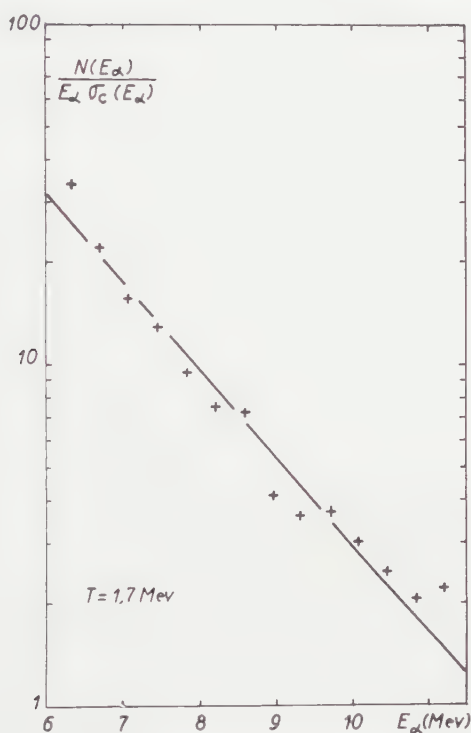


Fig. 5 — Détermination graphique de T

Enfin définissons la température par

$$N(E) = \tau \rho(E)$$

où  $N(E)$  est le nombre de niveaux excités du noyau résiduel dans l'intervalle d'énergie  $0 - E$ . Si  $\tau$  dépend peu de l'énergie  $E$ ,  $\tau$  est égal à  $T$ , la température nucléaire <sup>(5)</sup>.

<sup>(5)</sup> T. ERICSON — *Nucl. Phys.* 11 - 481 - 1959

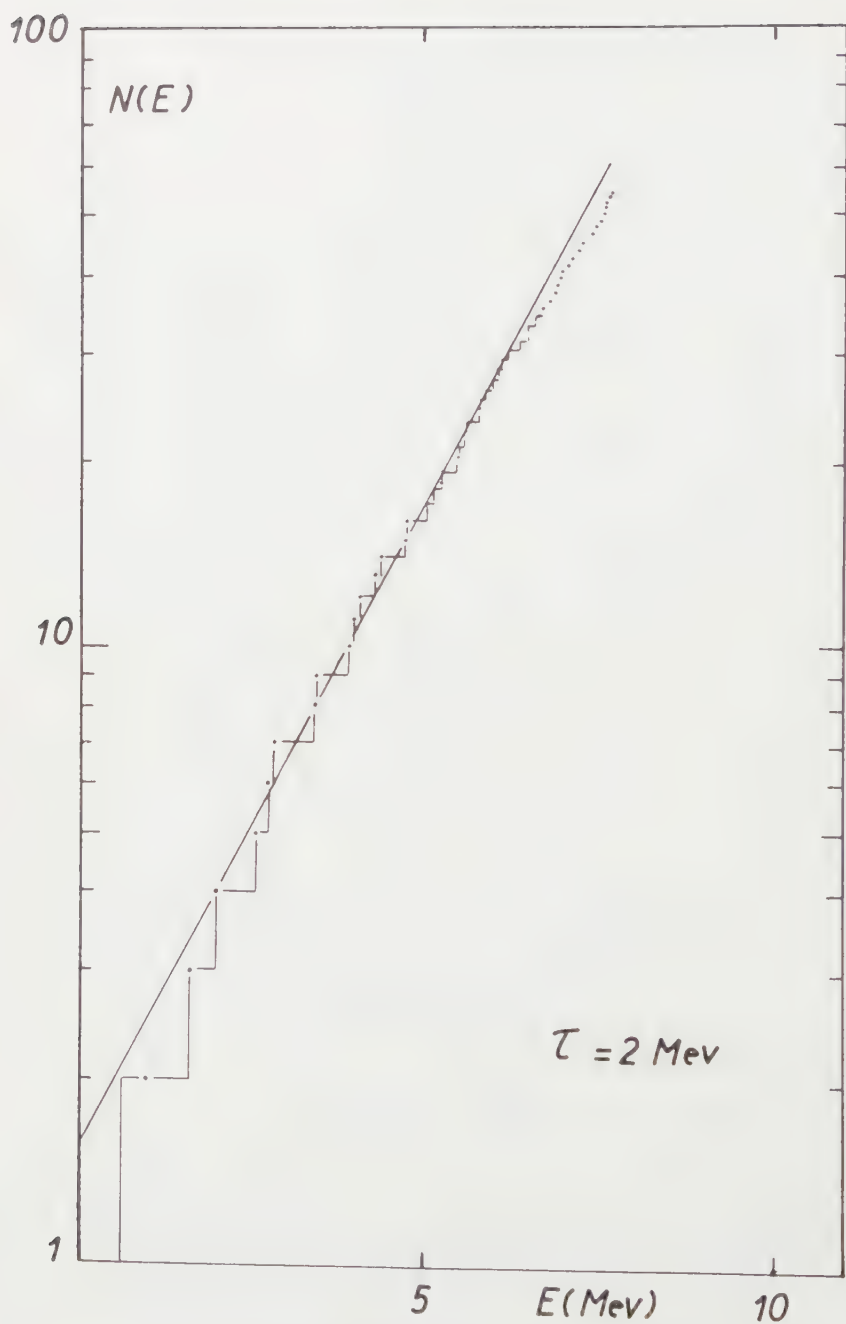


Fig. 6 — Détermination graphique de  $\tau$

Les résultats des mesures d'énergie des niveaux du  $\text{Mg}^{25}$  jusqu'à 7.62 Mev <sup>(6)</sup> nous ont permis de porter à la figure 6,  $N(E)$  en fonction de  $E$ ; on en tire

$$\tau = 2 \text{ Mev}$$

Remarquons que les valeurs de  $\tau$  et  $T$  sont très voisines de leur valeur asymptotique  $t$ ,

$$t = \left( \frac{E_{\alpha\text{max}}}{a} \right)^{1/2} = 1.8 \text{ Mev}$$

déduite de l'hypothèse d'un gaz de fermions (1).

CONCLUSIONS. Une étude systématique des niveaux à partir de ce triple point de vue semble s'imposer. En-dessous d'une énergie  $E_{\alpha}$  de 6 Mev il y a un net excès de particules  $\alpha$  de basses énergies. Faut-il l'attribuer à la méthode expérimentale, à une barrière coulombienne surestimée <sup>(7)</sup> ou à une autre voie compétitive favorisée par une structure en particules  $\alpha$



Des expériences sont en cours pour étayer ces conclusions.

Nous tenons à exprimer notre gratitude au Dr. G. DECONNINCK pour diverses discussions, ainsi qu'au personnel du cyclotron pour son aide constante.

Nos remerciements s'adressent également à Monsieur le Professeur M. de HEMPTINNE et à l'Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires qui nous ont permis de mener à bien ce travail.

<sup>(6)</sup> S. HINDS et R. MIDDLETON — Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure — Kingston — 1960.

<sup>(7)</sup> C. FULMER et B. COHEN — *Phys. Rev.* 112 - 1672 - 1959.  
C. FULMER et C. Goodman — *Phys. Rev.* 117 - 1339 - 1960.

## Diffusion élastique de neutrons de 14 Mev aux petits angles

PAR

G. DECONNINCK (\*), A. MARTEGANI (\*)  
J.P. MEULDERS et J. STOQUART

### ABSTRACT

Small angle elastic scattering cross sections are measured with 14 Mev neutrons for 4 groups of elements (Fe, Zn, Cu), (Cd, Sn), (Pb, Bi) and  $U^{238}$ .

Three effects may be responsible of an increase of the cross section in forward direction: magnetic coupling, polarisability and atomic electrons collisions. The results show an inexpected behaviour for Fe, Zn and Cu.

La diffusion élastique des neutrons et des protons s'explique remarquablement bien à l'aide du modèle optique de Bjorklund et Fernbach qui inclut dans le potentiel optique un terme de couplage spin orbite.

Cependant, les mesures effectuées précédemment sur l'Aluminium aux petits angles (1) ainsi que celles d'Alexandrof sur U et Th (2) ont montré que l'écart par rapport aux prédictions du modèle peut devenir important lorsque l'angle de diffusion devient inférieur à 5 degrés.

En fait, plusieurs contributions supplémentaires peuvent produire une intensification de la diffusion prévue par le modèle optique (3).

1° L'interaction électromagnétique du neutron et du champ coulombien du noyau cible introduit un terme supplémentaire dans le potentiel

$$V_{em} = -\mu_n \frac{e_L}{2M^2C^2} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \sigma \cdot L$$

2° La polarisation du neutron par le champ coulombien introduit le terme

$$V_{pol} = -\frac{1}{2} \alpha E^2 \quad \alpha \text{ étant la polarisabilité du neutron } (\alpha \sim 10^{-42} \text{ cm}^2).$$

(\*) Chercheurs I.I.S.N.



3° L'interaction du neutron incident avec les électrons du cortège électronique peut produire une diffusion du neutron aux très petits angles, à cause de la grande différence de masse entre les deux partenaires.

Ces deux derniers effets sont encore mal connus et c'est la raison pour laquelle des mesures de diffusion élastique s'imposent aux petits angles.

La polarisabilité du neutron dans le champ coulombien a été envisagée plus particulièrement par Alexandrov <sup>(2)</sup>.

Quoi qu'il en soit, ces effets contribuent à augmenter l'intensité de la diffusion élastique aux petits angles et l'effet sera d'autant plus important que la charge du noyau est élevée. On doit donc s'attendre à une augmentation plus importante dans le cas des noyaux lourds. Il ne faut pas perdre de vue que la contribution due au potentiel optique augmente avec  $Z$  également (suivant le facteur  $A^{2/3}$ ) de sorte que l'effet relatif sera moins important que l'on ne pourrait le croire à priori.

Signalons enfin que suivant Barashenkov et Barbashov <sup>(3)</sup> l'effet dû à la polarisabilité du neutron diminue avec l'énergie. Les neutrons de 14 Mev utilisés dans nos expériences défavorisent donc la diffusion produite par la polarisation électrique du neutron.

## MESURES ET RÉSULTATS

Grâce à la méthode décrite ailleurs <sup>(1)</sup> nous avons pu mesurer la diffusion élastique aux angles inférieurs à 5 degrés dans une série de corps groupés suivant les poids atomiques voisins

Al      (Fe Cu Zn)      (Sn Cd)      (Pb Bi)      U

L'aluminium (voir ref. 1) montre un accord parfait avec le modèle optique sauf cependant en-dessous de 5 degrés  $\text{cdm}$ . Les résultats obtenus sur trois corps de poids atomique voisin de 55 (Fe CuZn, éléments naturels) montrent une curieuse tendance à la diminution de la section efficace lorsque l'angle diminue. Si l'on peut mettre en doute cet effet sur chaque corps pris séparément, il faut reconnaître que l'effet d'ensemble est manifeste. Certains points ont été repris à deux mois d'intervalle et ont donné des valeurs sensiblement les mêmes.

Par contre, le Sn et Cd ainsi que Pb et Bi sont en accord avec la courbe théorique.

(1) DECONNINCK, DEMORTIER et MARTEGANI. *Ann. Soc. Sc. Brux.* Tome 74, II, 136 (1960).

(2) ALEXANDROV JETP. 33 (1957) 294.

(3) BARASHENKOV et BARBASHOV. *Nucl. Phys.* 9 (1959) 422.

Le cas de l'Uranium mériterait une attention particulière, car les seuls résultats probants sur la polarisabilité du neutron ont été obtenus par Alexandrof dans U et Th.

Afin d'écarter la possibilité de détection de neutrons de fission le spectre diffusé a été observé à l'aide d'un analyseur à 400 canaux (RIDL) et les mesures ont été prises en utilisant une fenêtre (single channel) au lieu d'un discriminateur.

La mesure obtenue est significative d'une augmentation de  $d\sigma/d\omega$  *el* vers 3 degrés.

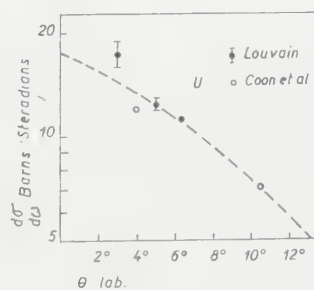
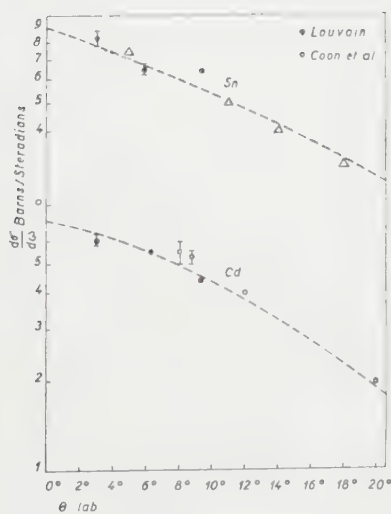
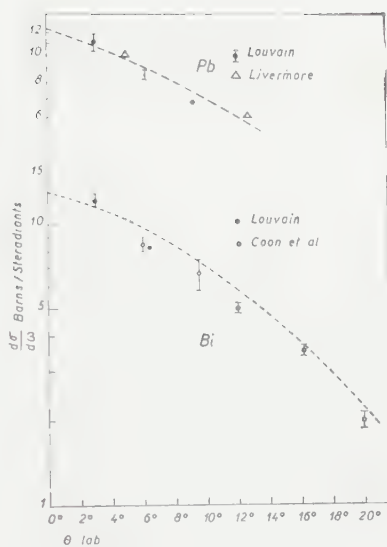
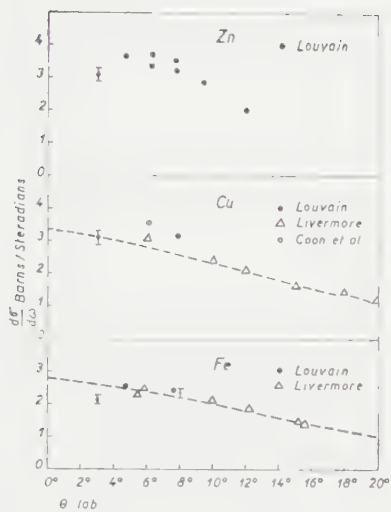
## CONCLUSIONS

Une étude systématique de  $d\sigma/d\omega$  *el* aux petits angles révèle les phénomènes suivants : dans le cas de Fe, Cu, Zn une diminution vers l'avant, dans le cas de U une augmentation.

Le comportement anormal de Fe, Cu, Zn peut difficilement s'interpréter dans le cadre des théories exposées au début du présent article. Toutefois, un effet d'interférence entre l'amplitude de diffusion potentielle et les autres contributions, n'est pas à écarter. La méthode expérimentale elle-même pourrait être incriminée à cause de la détection de neutrons diffusés inélastiquement; cependant les sections efficaces de diffusion inélastique sont généralement d'un autre ordre de grandeur que les sections efficaces de diffusion élastique.

Enfin il serait intéressant de poursuivre plus avant encore les mesures sur l'Uranium, afin d'observer une montée éventuelle de  $d\sigma/d\omega$  *el* comme celle observée par Alexandrov à 1 Mev.

Nous remercions le Professeur M. de Hemptinne pour ses conseils et encouragements, ainsi que l'I.I.S.N. qui a permis ce travail.





(T 54)

Imprimerie Ceuterick, s.c., 153, rue de Bruxelles, Louvain  
Dir. L. Pitsi, 25, rue Dagobert, Louvain (Belgique)



# Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936) La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'**UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS**.

*Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique)*

## PRIX D'ABONNEMENT

Belgique et Grand-Duché de Luxembourg . . . . .	200 francs belges
abonnement de soutien . . . . .	500 francs belges
abonnement d'honneur . . . . .	1000 francs belges
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120, boulevard St. Germain, Paris 6 <sup>e</sup> ) . . .	2160 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . . .	280 francs belges



# PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## EXTRAIT DU CATALOGUE

### ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages . . . F 150,00

### ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à LVI (1927 à 1936) . . . F 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » » » F 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) F 100,00 — (1929 à 1933) (1931 à 1936) F 40,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) F 20,00 — (1930)

(1931 à 1936) F 60,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXVII (1937 à 1953) F 70,00

tt. LXVIII à LXXII (1954 à 1958) F 100,00

tt. LXXIII et LXXIV (1959 et 1960) F 150,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) F 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . . F 100,00

### REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . F 200,00

Le fascicule trimestriel . . . F 60,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . . F 200,00

Le fascicule . . . F 40,00

t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXXI (1947 à 1960). Le volume F 200,00

Le fascicule . . . F 60,00

### TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . F 20,00

t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . F 40,00

### TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901). . . F 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . F 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . F 30,00

### MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930); en Belgique, F 24,00; autres pays : F 30,00.

II — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931); en Belgique, F 24,00; autres pays : F 30,00.

IV — F. Kaisin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939); en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

V — R. Delhez. — Table des solubilités des sels usuels à l'usage du chimiste praticien : F 10,00.

### MONOGRAPHIES MÉDICALES

I — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1938); en Belgique, F 70,00; autres pays, F 90,00.

III — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930); en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

### MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . F 20,00

II — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . F 10,00

III — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . F 60,00